

**Gesamtscript zur Vorlesung  
Lineare Algebra I**

**Prof.'in Dr. Salma Kuhlmann**

**Inhaltsverzeichnis zur Vorlesung: Lineare Algebra I**  
**Prof.'in Dr. Salma Kuhlmann**

**Kapitel 1 Lineare Gleichungen**

§ 1	Körper	1.-4. Vorlesung
§ 2	Lineare Gleichungssysteme	4.-5. Vorlesung
§ 3	Matrizen	5.-6. Vorlesung
§ 4	Homogene Systeme	7. Vorlesung
§ 5	Matrixprodukt	7. Vorlesung
§ 6	Elementare Matrizen	8.-10. Vorlesung

**Kapitel 2 Vektorräume**

§ 1	Definitionen und Beispiele	10. Vorlesung
§ 2	Unterraum	11. Vorlesung
§ 3	Basis und Dimension	12.-13. Vorlesung
§ 4	Koordinaten	14.-15. Vorlesung
§ 5	Zeilenraum	16. Vorlesung

**Kapitel 3 Lineare Abbildungen**

§ 1	Definitionen und Beispiele	17. Vorlesung
§ 2	Bild und Nullraum	17. Vorlesung
§ 3	Die Algebra $L(V, W)$	18. - 20. Vorlesung
§ 4	Matrix-Darstellung	20.-21. Vorlesung
§ 5	Lineare Funktionale und Dualraum	22.-24. Vorlesung
§ 6	Das Bidual	24.-25. Vorlesung
§ 7	Die Transponierte	25.-26. Vorlesung
§ 8	Quotientenraum	26.-27. Vorlesung

# 1 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra I

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

## Kapitel 1: § 1 Körper

### Bezeichnung 1.1.

$\mathbb{N} := \{1, 2, \dots\}$  die Menge der natürlichen Zahlen

$\mathbb{N}_0 := \{0, 1, \dots\} = \{0\} \cup \mathbb{N}$ .

$\mathbb{Z} :=$  Menge der ganzen Zahlen,

$\mathbb{Q} :=$  Menge der rationalen Zahlen,

$\mathbb{R} :=$  Menge der reellen Zahlen.

$\mathbb{Q}^\times = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$

$\mathbb{R}^\times = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

### Definition 1.2.

(i) Eine *Verknüpfung* (oder binäre Operation) (auf einer Menge  $G$ ) ist eine Funktion:

$$* : G \times G \rightarrow G.$$

### Bezeichnung 1.3.

$*(g, h) := g * h$

(ii) Sei  $G \neq \emptyset$ .

Das Paar  $(G, *)$  ist eine *Gruppe*, wenn

Assoziativ -  $(g * h) * k = g * (h * k) \quad \forall g, h, k, \in G$

Neutrales Element -  $\exists e \in G$  s.d.  
 $e * g = g = g * e \quad \forall g \in G$

Ex. von Inversen -  $\forall g \in G \exists h \in G$  s.d.  
 $g * h = e = h * g$

NB: Eindeutigkeit von neutralem Element und Inversen; siehe ÜB.

Kommutativ -  $g * h = h * g \quad \forall h, g$   
oder abelsch

### Beispiel 1.4.

I)  $(\mathbb{Z}, +), (\mathbb{Q}, +), (\mathbb{R}, +)$

II)  $(\mathbb{Q}^\times, \cdot), (\mathbb{R}^\times, \cdot)$

III)  $F := \{f | f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$

Verknüpfung:  $f, g \in F$  definiere  $f + g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $(f + g)(r) := f(r) + g(r) \quad \forall r \in \mathbb{R}$ .

**Neutrales**

$$Z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$Z(r) = 0 \quad \forall r \in \mathbb{R}$$

**Inverse**

$$-f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(-f)(r) := -(f(r)) \quad \forall r \in \mathbb{R}.$$

Dies sind abelsche (siehe Übungsblatt für nicht abelsche) und unendliche Gruppen. Wir konstruieren nun Beispiele von endlichen Gruppen.

Divisionsalgorithmus:

Seien  $a, b, \in \mathbb{Z}$ ;  $b > 0$ .  $\exists!$   $q, r \in \mathbb{Z}$  mit  $0 \leq r < b$  und  $a = bq + r$ .

**Beweis**

Betrachte zunächst den Fall  $a > 0$ . Falls  $0 < a < b$  setze  $q := 0$  und  $r := a$ , sonst  $a \geq b$ .

Betrachte die Menge  $S := \{s \in \mathbb{N}; sb \leq a\}$ .  $1 \in S$  also  $S \neq \emptyset$ ; und  $S$  ist endlich.

Setze  $q := \max S$

$r := a - qb$  (also  $r = 0$  gdw  $a = qb$ )

**Behauptung**

$$\underbrace{0 \leq r < b}$$

$$r \geq 0$$

gilt per Definition.

Widerspruchsbeweis:

Wenn  $r \geq b$ , dann  $a - qb \geq b$  i.e.  $a \geq qb + b$  i.e.  $a \geq (q + 1)b$ , also  $q + 1 \in S$  aber  $q + 1 > q$ . - Widerspruch.

**Eindeutigkeit**

$$\left. \begin{array}{l} a = q_1 b + r_1 \\ a = q_2 b + r_2 \end{array} \right\} \quad (\dagger).$$

Also von  $(\dagger) : 0 = (q_2 - q_1)b + (r_2 - r_1)$ .

Widerspruchsbeweis:

Wenn  $r_1 > r_2$ , dann  $(r_1 - r_2) > 0$ . Also ergibt sich aus  $(\dagger) :$

$$0 < (r_1 - r_2) = \underbrace{(q_2 - q_1)b}_{b > 0} \quad (*)$$

Also  $(q_2 - q_1) > 0$ . Also  $(q_2 - q_1)b \geq b$ .

Andererseits:  $r_1 < b$  und  $r_2 > 0$  also  $(r_1 - r_2) < (b - r_2) \leq b$ .

Mit  $(*)$  erhält man einen Widerspruch: linke Seite in  $(*) : < b$ ; rechte Seite in  $(*) : \geq b$ . - Widerspruch.

Also  $r_1 = r_2$  und mit  $(\dagger)$  bekommt man auch  $q_1 = q_2$ .

Sei nun  $c \in \mathbb{Z}$ ,  $c \leq 0$ . Wenn  $c = 0$ , setze  $q := 0$  und  $r := c$ ,  $c = 0 = 0b + 0$ . Wenn  $c < 0$ , setze  $a := (-c)$ , dann ist  $a > 0$ . Also  $\exists! q, r$  mit  $0 \leq r < b$  und  $a = bq + r$ .

$$r = 0 \Rightarrow c = -a = b(-q)$$

$$\begin{aligned} r \neq 0 \Rightarrow c = -a &= b(-q) + (-r) \\ &= b(-q) - b + (b - r) \\ &= b(-q - 1) + (b - r) \\ &= b[-(q + 1)] + \underbrace{(b - r)}_{0 < r < b} \end{aligned}$$

$$\text{also } 0 > -r > -b$$

$$\text{also } b > (b - r) > 0. \quad \square$$

## 2 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra I

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

Aus Divisionsalgorithmus: Sei  $n \in \mathbb{N}$ ;  $n > 1$ .  $\mathbb{Z}_n := \{0, \dots, n-1\}$  ist die Menge der "Reste" für die Division durch  $n$ .

### Bezeichnung 2.1.

$a \in \mathbb{Z}$ ;  $\bar{a} :=$  Rest der Division von  $a$  durch  $n$ .

i.e.  $a = qn + \bar{a}$   $0 \leq \bar{a} < n$

i.e. mit  $\bar{a} \in \{0, \dots, n-1\}$ .

Wir definieren eine Verknüpfung:

Für  $x, y \in \mathbb{Z}_n$  definiere  $x +_n y := \overline{x + y}$ .

### Behauptung 2.2.

$(\mathbb{Z}_n, +_n)$  ist eine abelsche Gruppe.

**Fall 1**  $n = 1$   $\mathbb{Z}_n = \{0\}$  die *triviale* Gruppe.

**Fall 2** Sei  $n \geq 2$ . Die Verknüpfung ist wohldefiniert.

Kommutativ? Seien  $x, y \in \mathbb{Z}_n$ .  $x +_n y = y +_n x$  ?

L.S. berechnen:

$$x +_n y \quad = \quad \overline{x + y} \quad = \quad \overline{y + x} \quad = \quad y +_n x$$

Def. von  $+_n$  weil  $(\mathbb{Z}, +)$  Def. von  $+_n$   
abelsche Gruppe

Assoziativ? Seien  $x, y, z \in \mathbb{Z}_n$ .

$$(x +_n y) +_n z \quad = \quad x +_n (y +_n z)$$

?

Berechne L.S.:

Setze  $\overline{x + y} = r_1$  und  $\overline{r_1 + z} := r_2$ .

Also  $x + y = q_1n + r_1$ , und  $r_1 + z = q_2n + r_2$ .

Also  $(x + y) + z = (q_1 + q_2)n + r_2$ . (\*)

Berechnung der R.S.:

Setze  $\overline{y + z} := r_3$  und  $\overline{x + r_3} := r_4$ .

Also  $y + z = q_3n + r_3$  und  $x + r_3 = q_4n + r_4$ .

Also  $x + (y + z) - q_3n = q_4n + r_4$ .

Also  $x + (y + z) = (q_3 + q_4)n + r_4$ . (\*\*)

Nun vergleiche (\*) und (\*\*) und beachte, dass  $(x + y) + z = x + (y + z)$  in  $\mathbb{Z}$ .

$$\begin{aligned} \text{Also } (x + y) + z &= (q_1 + q_2)n + r_2 = \\ x + (y + z) &= (q_3 + q_4)n + r_4 \end{aligned}$$

Eindeutigkeit von Rest im Divisionsalgorithmus  $\Rightarrow r_2 = r_4$

$$\text{i.e. } \overline{x + y + z} = \overline{x + \overline{y + z}}$$

i.e.  $(x +_n y) +_n z = x +_n (y +_n z)$  wie erwünscht.

- Ex. von neutralem Element  $0 \in \mathbb{Z}_n$ . Sei  $x \in \mathbb{Z}_n$ .

$$x +_n 0 \stackrel{?}{=} x$$

$$x +_n 0 = \overline{x + 0} = \bar{x}.$$

Aber für  $x \in \mathbb{Z}_n$  gilt  $\bar{x} = x$ . Also  $x +_n 0 = x$ .

- Ex. von additiven Inversen.

Sei  $x \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ . Falls  $x = 0$ , setze  $-x = 0$ .

Sei nun  $x \neq 0$  und setze  $-x := (n - x) \in \mathbb{Z}_n$ .

Es gilt  $x +_n (-x) = \overline{x + (-x)} = \bar{n} = 0$  wie erwünscht.

### Definition 2.3.

Ein Tripel  $(R, +, \cdot)$  ist ein *Ring mit Eins*, falls:

- $R$  ist eine nichtleere Menge und
- $+, \cdot$  sind Verknüpfungen auf  $R$  und
- $(R, +)$  ist eine abelsche Gruppe mit neutralem Element  $0 \in R$  und  $(R, \cdot)$  ist ein Monoid, d.h.
- $\cdot$  ist assoziativ und es existiert  $1 \in R$  mit  $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x \forall x \in R$  und
- $1 \neq 0$  und
- die Distributivitätsgesetze gelten:

Links:  $x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z) \forall x, y, z \in R$  und

Rechts:  $(y + z) \cdot x = (y \cdot x) + (z \cdot x) \forall x, y, z \in R$

### Definition 2.4.

Ein Ring  $(R, +, \cdot)$  ist *kommutativ* falls  $x \cdot y = y \cdot x \forall x, y \in R$ .

**Beispiel 2.5.** $(\mathbb{Z}, +, \cdot), (\mathbb{Q}, +, \cdot), (\mathbb{R}, +, \cdot).$ 

Gibt es endliche Beispiele?

Auf  $\mathbb{Z}_n$  definieren wir:  $x \cdot_n y := \overline{xy}$ .Übungsaufgabe: Prüfe, dass für  $n > 1$   $(\mathbb{Z}_n, +_n, \cdot_n)$  ein kommutativer Ring mit Eins ist.**Bezeichnung 2.6.** $F^\times := F \setminus \{0\}.$ **Definition 2.7.** q

$(F, +, \cdot)$  ist ein *Körper*, falls  $F \neq \emptyset$ ,  $(F, +)$  und  $(F^\times, \cdot)$  abelsche Gruppen sind mit 0 bzw. 1 als neutrale Elemente,  $1 \neq 0$  und die Distributivitätsgesetze gelten.

**Bemerkung 2.8.**

Also  $(F, +, \cdot)$  ist ein Körper, falls  $(F, +, \cdot)$  ein kommutativer Ring mit Eins ist und alle  $x \in F^\times$  sind *multiplikativ invertierbar*, d.h.  $\exists x^{-1} \in F^\times$  mit  $x \cdot x^{-1} = 1$ .

**Beispiel 2.9.** $(\mathbb{Q}, +, \cdot), (\mathbb{R}, +, \cdot)$  und später  $(\mathbb{C}, +, \cdot)$  sind Körper.**Frage**

Gibt es endliche Körper? Insbesondere betrachten wir nun die Frage:

Ist der Ring  $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$  ein Körper?Wir werden zeigen:  $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$  ist ein Körper, genau dann, wenn  $n = p$  Primzahl.



### 3 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra I

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

In Skript 2 haben wir gesehen, dass für  $n > 1$   $(\mathbb{Z}_n, +_n, \cdot_n)$  ein kommutativer Ring mit Eins ist. Wir wollen nun zeigen, dass  $(\mathbb{Z}_n, +_n, \cdot_n)$  ein Körper ist, genau dann, wenn  $n = p$  eine Primzahl (Definition siehe unten) ist.

“ $\Rightarrow$ ”:

**Lemma 3.1.**

Jeder Körper ist ein Integritätsbereich, d.h. aus  $xy = 0$  folgt  $x = 0$  oder  $y = 0$ ,  $\forall x, y$ .

**Beweis**

Sei  $xy = 0$  und  $x \neq 0$ . Also  $x^{-1}(xy) = x^{-1}0 = 0$ , d.h.  $(x^{-1}x)y = 1 \cdot y = y = 0$ . □

**Bemerkung 3.2.**

Hier haben wir benutzt:

$\forall z(z \cdot 0) = 0$ . (Übungsaufgabe).

Sei nun  $n > 1$ . Wir zeigen:

**Korollar 3.3.**

Sei  $n > 1$ ,  $(\mathbb{Z}_n, +_n, \cdot_n)$  Körper  $\Rightarrow n = p$  ist eine Primzahl.

**Beweis**

Annahme:  $n$  ist *keine* Primzahl. Also  $n = xy$  mit  $1 < x < n$ ,  $1 < y < n$ .

Also  $x, y, \in \mathbb{Z}_n$ ,  $x \neq 0$ ,  $y \neq 0$ , aber  $x \cdot_n y = \overline{xy} = 0$ . Also ist  $(\mathbb{Z}_n, +_n, \cdot_n)$  *kein* Körper. □

“ $\Leftarrow$ ”:

Wir wollen nun zeigen, dass  $n = p$  Primzahl  $\Rightarrow (\mathbb{Z}_p, +_p, \cdot_p)$  ist ein Körper.

Dafür wollen wir explizit die multiplikativen Inversen berechnen: Der Euklidische Algorithmus.

**Definition 3.4.**

(i) (positive) Divisoren

$a, b \in \mathbb{Z}; b > 0; a = bq + r$ . Falls  $r = 0$ :  $b$  teilt  $a$ ; Bezeichnung:  $b \mid a$ .

$b$  ist ein *Divisor von  $a$*  oder  $a$  ist ein *Vielfaches von  $b$* .

(ii)  $p \in \mathbb{N}$  (also  $p > 1$ ) ist eine Primzahl, falls 1 und  $p$  die einzigen (positiven) Divisoren von  $p$  sind.

(iii)  $\mathbb{N} \ni d$  ist ein *gemeinsamer Teiler* von  $a$  und  $b$  falls  $d \mid a$  und  $d \mid b$  (schreibe:  $d$  ist  $ggT(a, b)$ ).

(iv)  $\mathbb{N} \ni d$  ist der *größte gemeinsame Teiler* von  $a$  und  $b$  (Bezeichnung:  $d = ggT(a, b)$ ), falls  $d$  gemeinsamer Teiler und  $d$  die größte natürliche Zahl mit dieser Eigenschaft ist.

## Script 3: Lineare Algebra I

Äquivalent:

$\forall d' : d' \in \mathbb{N}$  und  $d'$  gemeinsamer Teiler von  $a$  und  $b$  gilt:  $d' \mid d$ .

Bemerkung: Die Menge der gemeinsamen Teiler zweier Zahlen  $a$  und  $b$  mit  $b \neq 0$  enthält stets die 1, ist also nicht leer und außerdem durch das Maximum von  $a$  und  $b$  nach oben beschränkt. Also existiert zu je zwei solchen Zahlen der größte gemeinsame Teiler.

Der Euklidische Algorithmus (zum Berechnen von  $ggT(a, b)$ ):

$a, b \in \mathbb{Z}; b > 0; b \mid a \Rightarrow ggT(a, b) = b$

sonst:

$$\begin{array}{l} a = b q_1 + r_1 \quad 0 < r_1 < b \\ b = r_1 q_2 + r_2 \quad 0 < r_2 < r_1 \\ r_1 = r_2 q_3 + r_3 \quad 0 < r_3 < r_2 \\ \vdots \end{array}$$

Rekursion ( $\rho$ )

$$\begin{array}{l} r_{j-1} = r_j q_{j+1} + r_{j+1} \quad 0 < r_{j+1} < r_j \\ \vdots \\ r_{n-3} = r_{n-2} q_{n-1} + r_{n-1} \quad 0 < r_{n-1} < r_{n-2} \\ r_{n-2} = r_{n-1} q_n + r_n \quad 0 < r_n < r_{n-1} \\ n \text{ maximal} \quad \text{mit} \quad r_n \neq 0 \end{array}$$

Absteigende Folge von natürlichen Zahlen *muss* anhalten nach  $0 < r_n < r_{n-1} < \dots < r_2 < r_1 < b$  endlich vielen Schritten.

### Behauptung 3.5.

$$r_n = ggT(a, b)$$

Die Behauptung folgt aus:

### Lemma 3.6.

$$a = bq + r \Rightarrow ggT(a, b) = ggT(b, r)$$

### Beweis

Setze  $d := ggT(b, r)$

- (1)  $d \mid b$  und  $d \mid r \Rightarrow d \mid a$  also  $d$  ist  $gT(a, b)$
- (2) Ferner  $d' \mid a$  und  $d' \mid b \Rightarrow d' \mid a - bq$  i.e.  $d' \mid r$ . Also  $d' \mid d$ .  
Also  $d = ggT(a, b)$  wie behauptet. □

Und ferner in  $(\rho)$ :

**Bemerkung 3.7.**

$r_n = \text{ggT}(r_{n-1}, r_{n-2})$  weil

$$\left. \begin{array}{l} r_n \mid r_{n-1} \\ \text{und} \\ r_n \mid r_n \end{array} \right\} \Rightarrow r_n \mid r_{n-2}$$

und  $d' \mid r_{n-1}$ ,  $d' \mid r_{n-2} \Rightarrow d' \mid (r_{n-2} - r_{n-1}q_n)$ , i.e.  $d' \mid r_n$

Also (in  $(\rho)$ ):  $\text{ggT}(a, b) = \text{ggT}(b, r_1) = \text{ggT}(r_1, r_2) = \dots = \text{ggT}(r_{n-1}, r_{n-2}) = r_n$ .

**Definition 3.8.**

Eine lineare Kombination von  $a$  und  $b$  (über  $\mathbb{Z}$ ) ist eine ganze Zahl  $\gamma$  der Gestalt:  $\gamma := \alpha a + \beta b$  wobei  $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ .

**Bemerkung 3.9.**

(1) Wir haben ständig die folgende Tatsache benutzt:

$d' \mid a$  und  $d' \mid b \Rightarrow d'$  teilt jede lineare Kombination von  $a$  und  $b$ , weil  
 $\gamma = \alpha d' a' + \beta d' b' = d'(\alpha a' + \beta b')$

(2) Rückwärts EA:

$\text{ggT}(a, b) = r_n$  ist eine lineare Kombination (über  $\mathbb{Z}$ ) von  $a$  und  $b$ :

Rekursion:

$r_n = \boxed{r_{n-2}} - \boxed{r_{n-1}} q_n$ . Aber hier werden nur  $r_{n-1}, r_{n-2}$  benötigt.

$$r_{n-1} = r_{n-3} - r_{n-2} q_{n-1}$$

Also  $r_n = r_{n-2} - [r_{n-3} - r_{n-2} q_{n-1}] q_n$ .

Hier werden nur  $r_{n-2}, r_{n-3}$  benötigt.

Verfahre so weiter.

Für numerische Beispiele und Berechnungen siehe Übungsblatt.

(3)  $\text{ggT}(a, b) = \text{ggT}(b, a)$  ( $a, b > 0$ ).

## 4 Skript zur Vorlesung: Lineare Algebra I

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

### Korollar 4.1.

$n = p$  ist eine Primzahl  $\Rightarrow (\mathbb{Z}_p, +_p, \cdot_p)$  ist ein Körper.

### Bezeichnung 4.2.

$\mathbb{F}_p$

### Beweis

$(\mathbb{Z}_p, +_p, \cdot_p)$  ist ein kommutativer Ring mit Eins. Sei nun  $x \in \mathbb{Z}_p$ ,  $x \neq 0$ .

Wir wollen zeigen:  $\exists y \in \mathbb{Z}_p$  mit  $\overline{xy} = x \cdot_p y = 1$ .

Nun  $x \in \{1, \dots, p-1\}$  und  $p$  prim  $\Rightarrow \text{ggT}(x, p) = 1$ . Also  $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{Z}$  mit  $\alpha \neq 0$  und  $\alpha x + \beta p = 1$ . (\*)

Also  $\alpha x = (-\beta)p + 1$ . A priori  $\alpha \in \mathbb{Z}$ , nehme  $\bar{\alpha} \in \{1, \dots, p-1\}$ .

(Bemerke, dass  $\bar{\alpha} \neq 0$ , sonst  $p \mid \alpha$ . Aber dann im (\*)  $p \mid 1$ ; Unsinn).

Also  $\alpha = qp + \bar{\alpha}$  (\*\*)

(\*\*) in (\*) ergibt:  $(qp + \bar{\alpha})x + \beta p = 1$ .

Also  $\bar{\alpha}x + qxp + \beta p = 1$ .

Also  $\bar{\alpha}x + (qx + \beta)p = 1 \Rightarrow \bar{\alpha}x = -(qx + \beta)p + 1$  (\*\*\*)

mit  $\bar{\alpha} \in \mathbb{Z}_p$ .

Setze  $\bar{\alpha} := y$ .

Berechne  $x \cdot_p y = \overline{xy} = 1$  aus (\*\*\*) und Eindeutigkeit von Rest in DA. □

ÜA für ÜB: Zeige folgende:

### Proposition 4.3.

Sei  $p$  eine Primzahl,  $a, b \in \mathbb{N}$ . Wenn  $p \mid ab$ , dann  $p \mid a$  oder  $p \mid b$ .

**Frage:** Gibt es andere endliche Körper?

### Definition 4.4. (Charakteristik)

Sei  $K$  ein Körper, definiere

$$\text{Char}(K) := \begin{cases} \text{die kleinste natürliche Zahl } (n \geq 2) \text{ wofür} \\ \underbrace{1 + 1 + \dots + 1 = 0}_{n\text{-mal}} & \text{falls existiert} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(Bezeichnung:  $\underbrace{1 + \dots + 1}_{n\text{-mal}} := n \cdot 1$ .)

I.e.  $\text{Char}(K) = 0$  falls  $\underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{n\text{-mal}} \neq 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

**Lemma 4.5.**

$\text{Char}(K) \neq 0 \Rightarrow \text{Char}(K) = p$  eine Primzahl.

**Beweis**

Sei  $n \neq 0$   $n = \text{Char}(K)$ .

$n$  nicht prim  $\Rightarrow n = n_1 n_2$  mit  $1 < n_i < n$  für  $i = 1, 2$ .

$$\text{Also } 0 = \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{n_1 n_2 \text{mal}} = \underbrace{(1 + \dots + 1)}_{n_1 \text{-mal}} \underbrace{(1 + \dots + 1)}_{n_2 \text{-mal}} = 0.$$

$$\text{Also } \underbrace{1 + \dots + 1}_{n_1 \text{-mal}} = 0 \text{ oder } \underbrace{1 + \dots + 1}_{n_2 \text{-mal}} = 0 - \text{Widerspruch.} \quad \square$$

**Beispiel 4.6.**

$$\text{Char}(\mathbb{F}_p) = p$$

$$\text{Char}(\mathbb{Q}) = \text{Char}(\mathbb{R}) = 0$$

[ weil  $1 > 0$

$$\text{also } 1 + 1 > 0 + 1 = 1 > 0$$

⋮

$$\underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{n+1 \text{mal}} = \underbrace{(1 + \dots + 1)}_{n \text{mal}} + 1 > \underbrace{(1 + \dots + 1)}_{n \text{mal}} > 0]$$

**Definition 4.7. und Bemerkung**

$k \subset K$  ist ein *Teilkörper*, falls  $0, 1 \in k$ ,

$k$  abgeschlossen unter  $x + y, xy, -x, x^{-1}$  für  $x \neq 0$ .

Bemerke:  $\text{Char}(k) = \text{Char}(K)$ .

**Lemma 4.8.**

$$K \text{ endlich} \Rightarrow \begin{cases} (1) & \text{Char}(K) = p > 0 \quad \text{und} \\ (2) & |K| = p^l \quad \quad \quad l \in \mathbb{N} \end{cases}$$

**Beweis**

(1) Wir zeigen die Kontraposition:  $\text{Char}(K) = 0 \Rightarrow K$  unendlich.

Wir behaupten:  $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ ,  $n_1 \neq n_2 \Rightarrow$

$$\underbrace{1 + \dots + 1}_{n_1} \neq \underbrace{1 + \dots + 1}_{n_2}.$$

Ohne Einschränkung (OE)  $n_1 > n_2$ ;  $(n_1 - n_2) > 0$

$$\underbrace{(1 + \dots + 1)}_{n_1} - \underbrace{(1 + \dots + 1)}_{n_2} = \underbrace{(1 + \dots + 1)}_{n_1 - n_2} = 0 - \text{Widerspruch.}$$

(2) Dafür brauchen wir lineare Algebra! Also später! (Basis und Dimension)

**Beispiel 4.9.**

$K = \mathbb{F}_p(t)$  ist der Körper der rationalen Funktionen über dem endlichen Körper  $\mathbb{F}_p$ .  
 $K$  unendlich; aber  $\text{Char}(K) = p > 0$ . Dafür brauchen wir Polynomringe. Später!

**Bemerkung 4.10.**

Also  $K$  unendlich  $\not\Rightarrow \text{Char}(K) = 0$ .

## Kapitel 1: § 2 Lineare Gleichungssysteme

### Definition 4.11.

- (i) Sei  $n \in \mathbb{N}$ , und  $K$  ein Körper. Eine *lineare Gleichung über  $K$*  in den Variablen  $x_1, \dots, x_n$  und Koeffizienten in  $K$  ist eine Gleichung der Form:

$$a_1x_1 + \dots + a_nx_n = b \quad (*)$$

wobei  $a_1, \dots, a_n, b \in K$ .

### Terminologie

$a_i$  ist der Koeffizient der Variablen  $x_i$ .

- (ii) Ein  $n$ -Tupel  $c := (c_1, \dots, c_n) \in K^n$  ist *eine Lösung* der Gleichung (\*), falls die Identität  $a_1c_1 + \dots + a_nc_n = b$  gilt in  $K$ .

### Beispiel 4.12.

a)  $\sqrt{2}x_1 + \pi x_2 = e$  ist eine l. G. über  $\mathbb{R}$ .

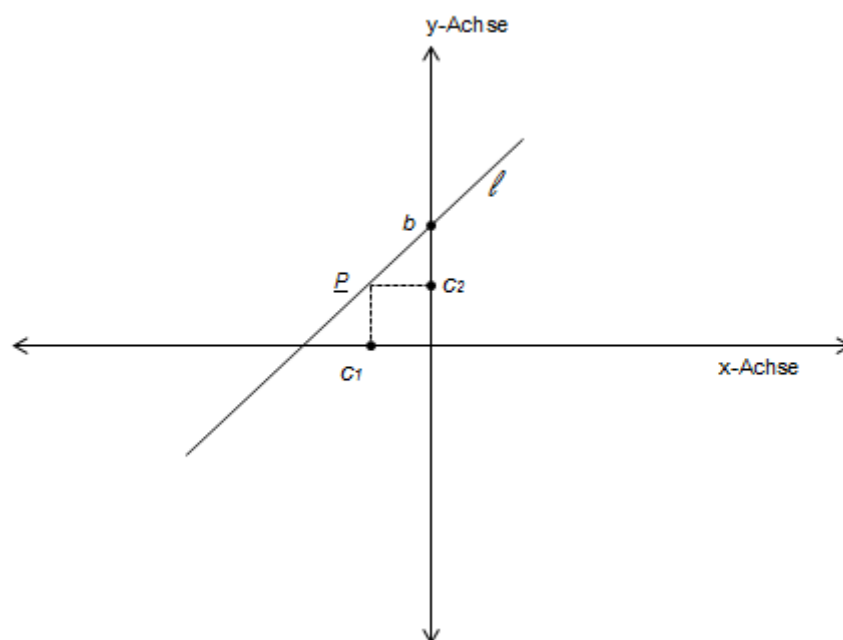
b)  $2\sqrt{x_1} + \pi x_2^2 = e$  ist keine l.G. über  $\mathbb{R}$ .

c) Linie:  $y = ax + b$  ist die Gleichung ( $a, b \in \mathbb{R}, a :=$  Steigung;  $b := y$  - intersect) einer Geraden (in der Ebene  $\mathbb{R}^2$ ):  $l$ .

Umschreiben:  $x_2 - ax_1 = b$ .

Lösung:

$\underline{P}$ : Punkt in  $\mathbb{R}^2$ ;  $\underline{P} = \underline{P}(c_1, c_2)$  mit Koordinaten  $c_1$  und  $c_2$  ist eine Lösung gdw  $\underline{P} \in l$ , d.h.  $\underline{P}$  liegt auf  $l$ .







**(Typ 2 - Umformung)**

Multiplikation der Zweiten und der dritten Gleichung mit  $1/2$  ergibt schließlich:

$$(S_2) \begin{cases} x_1 & & = 1 \\ & x_2 & = 1 \\ & & x_3 = 3 \end{cases}$$

Damit ist  $(1, 1, 3)$  eine Lösung (prüfe durch Einsetzen).

$$L(S_1) = \{(1, 1, 3)\}?$$

Die Frage ist, ob man durch die Umformung obiger Gleichung keine Lösungen verloren hat.

Wir wollen zeigen, dass die Lösungsmenge unter den elementaren Gleichungsumformungen invariant ist. Wir untersuchen sie nun.

**Typ 1:****Vertauschen**

$$(S_1) \begin{cases} G_1 = b \\ \vdots \\ G_i = b_i \\ \updownarrow \\ G_j = b_j \\ G_m = b_m \end{cases} \xrightarrow{\text{Typ 1}} \begin{cases} \vdots \\ \vdots \\ G_j = b_j \\ \vdots \\ G_i = b_i \\ \vdots \end{cases} (S_2)$$

**Bemerkung 5.3.**

(i)  $(S_2) \xrightarrow{\text{Typ 1}} (S_1)$

(ii)  $\underline{x}$  Lösung von  $(S_1) \Rightarrow \underline{x}$  Lösung von  $(S_2)$

**Typ 2:****Multiplizieren einer Gleichung mit  $\lambda \in K^\times$** 

$$(S_1) \begin{cases} G_1 = b_1 \\ \vdots \\ G_i = b_i \\ \vdots \\ G_m = b_m \end{cases} \xrightarrow{\text{Typ 2}} \begin{cases} G_1 = b \\ \vdots \\ \lambda G_i = \lambda b_i \\ \vdots \\ G_m \end{cases} (S_2)$$

**Bemerkung 5.4.**

(i)  $(S_2) \xrightarrow{\text{Typ 2}} (S_1)$  (Multiplikation durch  $\lambda^{-1}$ )

(ii)  $G_i = b_i \Rightarrow \lambda G_i = \lambda b_i$  (folgt aus Körperaxiome), also  
 $\underline{x}$  Lösung von  $(S_1) \Rightarrow \underline{x}$  Lösung von  $(S_2)$

**Typ 3:****Addieren des  $\lambda$ -fachen der  $i$ -ten Gleichung zur  $j$ -ten Gleichung** $i \neq j; \lambda \in K$ 

$$(S_1) \left\{ \begin{array}{l} G_1 = b_1 \\ \vdots \\ G_i = b_i \\ \vdots \\ G_j = b_j \\ \vdots \\ G_m = b_m \end{array} \xrightarrow{\text{Typ 3}} \begin{array}{l} G_1 = b \\ \vdots \\ G_i = b_i \\ \vdots \\ \lambda G_i + G_j = \lambda b_i + b_j \\ \vdots \\ G_m = b_m \end{array} \right.$$

**Bemerkung 5.5.**

(i)  $(S_2) \xrightarrow{\text{Typ 3}} (S_1)$   
 (Addition  $(-\lambda)$ -fach der  $i$ -ten Gleichung zur  $j$ -ten)

(ii)  $G_i = b_i \Rightarrow \lambda G_i = \lambda b_i$  und addiere  $G_j = b_j$   
 also (Körperaxiome)  $\lambda G_i + G_j = \lambda b_i + b_j$ .  
 Also  $\underline{x}$  Lösung von  $(S_1) \Rightarrow \underline{x}$  Lösung von  $(S_2)$

**Definition 5.6.**

$(S_2)$  ist *äquivalent* zu  $(S_1)$ , falls man  $(S_2)$  aus  $(S_1)$  durch endlich viele elementare Gleichungsumformungen erhält.

**Bemerkung 5.7.**

Durch Bemerkung 5.3 (i), 5.4 (i) und 5.5 (i) bekommt man sofort:

$(S_2)$  äquivalent  $(S_1) \Rightarrow (S_1)$  äquivalent  $(S_2)$ .

Also sagen wir:  $(S_1)$  und  $(S_2)$  sind *äquivalent*.

**Satz 5.8.**

Äquivalente Systeme haben die gleiche Lösungsmenge.

**Beweis**

Aus Bemerkung 5.3 (ii), 5.4 (ii) und 5.5 (ii) haben wir:

$$L(S_1) \subseteq L(S_2).$$

Aus Bemerkung 5.3 (i), 5.4 (i) und 5.5 (i) bekommt man nun umgekehrt

$$L(S_2) \subseteq L(S_1). \text{ Also } L(S_1) = L(S_2).$$

**Bemerkung 5.9.**

Wir werden die Umkehrung vom Satz später studieren!

Also wollen wir die Gleichung umformen, um "einfachere" Systeme zu bekommen. Wir müssen den Begriff "einfacher" formalisieren. Dafür führen wir nun Matrizen ein.

## Kapitel 1: § 3 Matrizen

### Definition 5.10.

Seien  $m, n \in \mathbb{N}$ . Eine  $m \times n$  Matrix über  $K$  ist eine Familie in  $K$  der Gestalt

$$A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$$

wobei  $a_{ij} \in K$  für alle  $i, j$ .

### Darstellung

$$(i) \quad \begin{array}{c} S_j := j\text{-te Spalte} \\ \\ m\text{-Zeilen} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \leftarrow R_i := i\text{-te Zeile} \\ \\ \uparrow n\text{-Spalten} \end{array}$$

(ii) Die *Koeffizientenmatrix* zum System  $(S)$  ist

$$A(S) := \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

und die erweiterte Koeffizientenmatrix ist

$$(A, \underline{b}) := \left( \begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

Matrix-Darstellung von  $(S)$  ist:  $A\underline{x} = \underline{b}$ , wobei

$$\underline{x} := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

(Eine  $n \times 1$  Matrix mit Variablen als Koeffizienten.)

und

$$\underline{b} := \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

(Eine  $m \times 1$ -Matrix über  $K$ .)

- (iii) Die *elementaren Zeilenumformungen* von Typ 1, Typ 2 und Typ 3 entsprechen genau den elementaren Gleichungsumformungen.
- (iv) Seien  $A, B$   $m \times n$  Matrizen.  $A$  und  $B$  sind *Zeilenäquivalent*, falls man  $B$  aus  $A$  durch endlich viele Zeilenumformungen erhält (und / oder umgekehrt). Das ist die Matrix analog von Definition 5.6 für Systeme.

**Satz 5.11.**

(Matrix analog von Satz 5.8)

Bei elementaren Zeilenumformungen (auf die erweiterte Koeffizientenmatrix) ändert sich die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems nicht.

Nun wollen wir endlich beschreiben, was wir mit "einfacher" meinen.

**Definition 5.12.**

Eine  $m \times n$ -Matrix  $A$  ist in *reduzierter Zeilenform* (Abkürzung: r.Z.F) falls

- (a) der erste Koeffizient  $\neq 0$  ist 1 in einer Zeile  $R_i \neq 0$ .  
(Dieser erste Koeffizient verschieden von Null heißt *Hauptkoeffizient* bzw. *Haupteins*.  
Bedeutung von  $R_i \equiv 0$ : eine Reihe der Matrix heißt "Nullreihe", falls alle Koeffizienten, die darin vorkommen, gleich Null sind.
- (b) Jede Spalte von  $A$ , in der sich eine Haupteins befindet, hat alle anderen Koeffizienten gleich Null.

**Beispiel 5.13.**

(Matrix-Form): Erweiterte Matrix von  $(S_1)$ :

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 2 & 6 \\ 2 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \text{ nicht in r.Z.F.}$$

Erweiterte Matrix von  $(S_2)$  dagegen:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

## 6 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra I

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

### Beispiel 6.1.

(i) Die Identitätsmatrix oder Einheitsmatrix (quadratische Matrix)  $I_n$  wird so definiert:

$$(I)_{ij} = \underbrace{\delta_{ij}}_{\text{Kronecker Delta}} := \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases}$$

$I_n$  ist in r.Z.F.

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & 1 & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(ii)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

sind **nicht** in r.Z.F.

(iii) Die  $0^{m \times n}$ -Matrix ( $0_{ij} = 0$  für alle  $i = 1, \dots, m$  und  $j = 1, \dots, n$ ) ist in r.Z.F.

### Definition 6.2.

Eine  $m \times n$ -Matrix  $A$  ist in einer (*reduzierten*) Zeilenstufenform (r.Z.S.F.), falls die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

- Axiome für r.Z.F. und
- Axiome für r.Z.F. und
- jede identische Nullzeile erscheint (falls vorhanden) nach jeder nicht identischen Nullzeile.
- Seien  $Z_1, \dots, Z_r$  die nicht identischen Nullzeilen ( $r \leq m$ ) und  $k_i$  der Spaltenindex, in der die Haupteins der  $i$ -ten Zeile erscheint ( $i = 1, \dots, r$ ), dann gilt  $k_1 < k_2 < \dots < k_r$ .

### Satz 6.3.

Jede  $m \times n$ -Matrix  $A$  ist zeilenäquivalent zu einer Matrix  $B$  in r.Z.S.F.

Beweis siehe unten

**Zweck:** Aus der r.Z.S.F. kann man  $L(S)$  sofort ablesen.

**Beispiel 6.4.**

Über  $\mathbb{Q}$ : Erweiterte Koeff-M:

$$(i) \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = 4 \\ x_2 = 7 \\ x_3 = -1 \end{array}$$

$$(ii) \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \leftarrow \text{inkonsistent.}$$

$$(iii) \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \end{array} \right)$$

$x_1, x_2, x_3$  Hauptvariablen;  $x_4$  freie Variable.

$$\begin{array}{rcl} x_1 & + & 4x_4 = -1 \\ x_2 & + & 2x_4 = 6 \\ x_3 & + & 3x_4 = 2 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = -1 - 4x_4 \\ x_2 = 6 - 2x_4 \\ x_3 = 2 - 3x_4 \end{array}$$

$$x_4 = q \in \mathbb{Q} \text{ also } L(S) = \{(-1 - 4q, 6 - 2q, 2 - 3q, q) \in \mathbb{Q}^4; q \in \mathbb{Q}\}$$

**Beweis** von Satz 6.3:

Falls  $A = 0^{m \times n}$ , dann ist  $A$  bereits in r.Z.S.F. Ansonsten:

**Typ 1** Bei wiederholter Anwendung von Typ 1 können wir  $\mathbb{E}$  annehmen, dass die Zeilen  $Z_1, Z_2, \dots, Z_r$  nicht Null sind ( $r \leq m$ )

**und**  $Z_{r+1}, \dots, Z_m$  Null sind (wobei  $r = m$  vorkommen kann!).

Wir betrachten  $Z_1$ :

Sei  $0 \neq a_{1k_1}$  Hauptkoeffizient ( $1 \leq k_1 \leq n$ )

**Typ 2** Multipliziere  $Z_1$ , durch  $a_{1k_1}^{-1}$  und dann für jede  $2 \leq i \leq r$ :

**Typ 3** Addiere  $(-a_{ik_1})$ -fach von (der neu erhaltenen Zeile)  $Z_1$  zur  $i$ -ten Zeile

$$\begin{array}{c} \text{Spalte } k_1 \\ \downarrow \\ z_1 \left( \begin{array}{cccccccc} 0 & \dots & 0 & 1 & * & \dots & \dots & * \\ & & & 0 & & & & \\ & & & \vdots & & & & \\ & & & 0 & & & & \\ & & & \vdots & & & & \\ z_r \left( \begin{array}{cccccccc} - & - & - & - & - & - & - & - \\ 0 & \dots & \dots & & \dots & \dots & 0 & \\ & & & \vdots & & & & \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 & \end{array} \right) \end{array} \right) := A_1$$

Nun betrachte  $Z_2$  der Matrix  $A_1$ . Wieder

**Typ 1**  $\mathbb{C}Z_2 \neq 0$ .

Sei  $a_{2k_2} \neq 0$  Hauptkoeffizient von  $Z_2$ . Bemerke:  $k_2 \neq k_1$ ! Also haben wir

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 & * & \cdots & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & a_{2k_2} & \cdots & 0 & * & \cdots & \cdots & * \\ & & & & & \vdots & & & & \\ & & & & & \vdots & & & & \\ & & & & & 0 & & & & \end{pmatrix} = A_1 \text{ (Fall 1) } (k_2 < k_1)$$

oder

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \cdots & a_{2k_2} & \cdots & * \\ & & & & & 0 & & & \\ & & & & & \vdots & & & \\ & & & & & 0 & & & \end{pmatrix} = A_1 \text{ (Fall 2) } (k_1 < k_2)$$

**Typ 2** Wiederhole: Multipliziere  $Z_2$  durch  $a_{2k_2}^{-1}$ , dann

**Typ 3** Im Fall 1 ( $k_2 < k_1$ ): Addiere  $(-a_{ik_2})$ -fach von  $Z_2$  zur  $i$ -ten Zeile für  $3 \leq i \leq m$ .

**Typ 3** Im Fall 2 ( $k_1 < k_2$ ): Addiere  $(-a_{ik_2})$ -fach von  $Z_2$  zur  $i$ -ten Zeile für  $i = 1$  und  $3 \leq i \leq m$ .  $\square$

### Achtung

Wichtig ist es zu bemerken, dass wir die Koeffizienten

$$a_{1j} = 0 \quad j = 1, \dots, k_1 - 1 \text{ und}$$

$$a_{1k_1} = 1 \text{ und}$$

$$a_{ik_1} = 0 \quad i = 2, \dots, m \text{ von } A_1 \text{ in beiden F\u00e4llen } k_2 < k_1 \text{ oder } k_1 < k_2 \text{ nicht ge\u00e4ndert haben !}$$

Per Induktion wiederholen wir diese Prozedur f\u00fcr  $i = 3, \dots, r$ . Wir erhalten eine Matrix  $A_r$ , die nun (a), (b), (c) gen\u00fcgt. Schlie\u00dflich erhalten wir bei wiederholter Anwendung von Typ 1 eine Matrix  $B$ , die auch (d) gen\u00fcgt, also  $B$  ist in r.z.S.F.

## Kapitel 1: § 4 Homogene Systeme

### Beispiel 6.5.

Sei  $R$  folgende Matrix (über  $\mathbb{Q}$ )

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{matrix}$$

finde  $L(S)$ , wobei  $(S)$  das homogene System  $R\underline{X} = \underline{0}$  ist.

### Lösung

$R$  ist in r.Z.S.F. Beobachte:  $r :=$  Anzahl der  $\neq 0$ -Zeilen  $= 2 =$  Anzahl Hauptvariable.

$$(S) \quad \begin{array}{rcl} x_2 - 3x_3 & + \frac{1}{2}x_5 & = 0 \\ & x_4 + 2x_5 & = 0 \end{array}$$

$$\text{Also } x_2 = 3x_3 - \frac{1}{2}x_5$$

$$x_4 = -2x_5$$

$x_1, x_3, x_5$  freie Variable. Setze  $x_1 = a, x_3 = b, x_5 = c$ .

$$\text{Also } L(S) = \{(a, 3b - \frac{1}{2}c, b, -2c, c) \in \mathbb{Q}^5; a, b, c \in \mathbb{Q}\}.$$

### Bemerke

$x_1$  freie Variable. Setze  $a = 1, b = c = 0$ . dann ist  $(1, 0, 0, 0, 0)$  eine nicht-triviale Lösung.



## 7 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra I

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

### Korollar 7.1.

Sei  $R$  eine  $m \times n$ -Matrix in r.Z.S.F und setze  $r :=$  die Anzahl der  $\neq 0$ -Zeilen von  $R$ . Falls  $r < n$ , dann hat das homogene System

$$R\underline{X} = \underline{0} \quad (*)$$

nicht triviale Lösungen.

### Beweis

$r =$  Anzahl der  $\neq 0$ -Zeilen in r.Z.S. F.  
 $=$  Anzahl der Haupteins  
 $=$  Anzahl der Hauptvariablen.

Also  $n - r =$  Anzahl der freien Variablen und  $r < n \Rightarrow n - r \neq 0 \Rightarrow$  es existiert mindestens eine freie Variable  $x_j$ . Wir erhalten eine nicht triviale Lösung für (\*), indem wir z.B.  $x_j = 1$  setzen.  $\square$

### Korollar 7.2.

Sei  $A$  eine (beliebige)  $m \times n$ -Matrix mit  $m < n$ . Dann hat das homogene System

$$(S) \quad A\underline{X} = \underline{0}$$

nicht triviale Lösungen.

### Beweis

Sei  $R$  in r.Z.S.F zeilenäquivalent zu  $A$ . ( $R$  ist immer noch eine  $m \times n$ -Matrix.) Setze  $r :=$  Anzahl der  $\neq 0$ -Zeilen von  $R$ .

Also  $r \leq m < n$ . Also hat

$$R\underline{X} = \underline{0} \quad (*)$$

nach Korollar 7.1 nicht triviale Lösungen und damit auch (S).  $\square$

### Bemerkung 7.3.

Sei  $R$  eine  $n \times n$ -Matrix in r.Z.S.F und *ohne Nullzeilen* (also jede Zeile hat eine Haupteins). Dann ist  $R = I_n$ .

### Beweis

r.Z.S.F  $\Rightarrow 1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_n \leq n$ , wobei  $k_j$  die Spalte ist, in der die Haupteins der Zeile  $Z_j$  erscheint.

Also  $k_j = j$ , für alle  $j = 1, \dots, n$ .

Also  $a_{jj} = 1$ , für alle  $j = 1, \dots, n$ .

Sei  $i \neq j$ , dann ist  $a_{ij}$  in der  $k_j$ -Spalte

r.Z.S.F  $a_{ij} = 0$  (weil  $a_{ij} \neq a_{jj}$ ).  $\square$

**Korollar 7.4.**

Sei  $A$  eine  $n \times n$ -Matrix. Es gilt:

$A$  zeilenäquivalent zu  $I_n \Leftrightarrow A\underline{X} = \underline{0}$  hat nur die triviale Lösung.

**Beweis**

“ $\Rightarrow$ ” klar, weil  $I_n\underline{X} = \underline{0}$  nur die triviale Lösung hat.

“ $\Leftarrow$ ” Sei  $R$  eine  $n \times n$ -Matrix in r.Z.S.F und zeilenäquivalent zu  $A$ . Sei  $r :=$  Anzahl der  $\neq 0$ -Zeilen von  $R$ . Korollar 7.2  $\Rightarrow r \geq n$ . Andererseits  $r \leq n$ . Also  $r = n$ . Also hat  $R$  keine Nullzeilen  $\Rightarrow R = I_n$ .  $\square$

## Kapitel 1: § 5 Matrix-Multiplikation

### Definition 7.5.

Seien  $A$  eine  $m \times n$ - und  $B$  eine  $n \times p$ -Matrix über  $K$ .

Wir definieren eine neue Matrix  $C := AB$ ; das Produkt als die folgende  $m \times p$ -Matrix:

$$C_{ij} := \sum_{r=1}^n A_{ir} B_{rj}.$$

Also Zeilen mal Spalten!

### Beispiel 7.6.

$$(1) \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} x_1 + \cdots + a_{1n} x_n \\ a_{21} x_1 + \cdots + a_{2n} x_n \\ \vdots \\ a_{m1} x_1 + \cdots + a_{mn} x_n \end{pmatrix}$$

$m \times n \quad n \times 1 \quad m \times 1$

$$(2) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} + 0 + 0 & a_{12} + 0 + 0 & a_{13} + 0 + 0 \\ 0 + a_{21} + 0 & 0 + a_{22} + 0 & 0 + a_{23} + 0 \\ 0 + 0 + a_{31} & 0 + 0 + a_{32} & 0 + 0 + a_{33} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

(3) **Allgemeiner:** Sei  $A$  eine  $n \times n$ -Matrix. Es gilt  $C = AI_n = I_n A = A$ .

**Beweis:** Wir zeigen  $AI_n = A$ . ( $I_n A$  wird analog behandelt.)

$$(AI_n)_{ij} = \sum_{r=1}^n A_{ir} (I_n)_{rj} \quad (*)$$

Fall 1  $r \neq j$   $(I_n)_{rj} = 0$   
 Fall 2  $r = j$   $(I_n)_{rj} = 1$  } in (\*) eingesetzt ergibt die Summe

$$\sum_{r=1}^n A_{ir} (I_n)_{rj} = A_{ij} (I_n)_{jj} = A_{ij}$$

□

(4) Über  $\mathbb{F}_7$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1 \bullet_7 5) + (2 \bullet_7 0) & (1 \bullet_7 6) + (2 \bullet_7 1) \\ (3 \bullet_7 5) + (4 \bullet_7 0) & (3 \bullet_7 6) + (4 \bullet_7 1) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$2 \times 2 \quad 2 \times 2 \quad 2 \times 2$

(5) Die  $j$ -te Spalte von  $AB$  (als  $m \times 1$ -Matrix) =  $\underbrace{A}_{m \times n}$  [ $j$ -te Spalte von  $B$ ] (als  $n \times 1$ -Matrix).

und:

Die  $i$ -te Zeile von  $AB$  (als  $1 \times p$ -Matrix) = (als  $1 \times n$ -Matrix) [ $i$ -te Zeile von  $A$ ]  $\underbrace{B}_{n \times p}$ .

### Satz 7.7.

Seien  $A, B, C$  Matrizen über  $K$ , so dass die Produkte  $BC$  und  $A(BC)$  definiert sind, dann sind auch die Produkte  $AB$  und  $(AB)C$  definiert und es gilt:

$$A(BC) = (AB)C.$$

### Beweis

Sei  $B$  eine  $n \times p$ -Matrix. Also hat  $C$   $p$  Zeilen und  $BC$   $n$  Zeilen. Also (weil  $A(BC)$  definiert ist) ist  $A$  eine  $m \times n$ -Matrix. Also ist  $AB$  eine wohldefinierte  $m \times p$ -Matrix und  $(AB)C$  ist damit auch wohldefiniert.

Wir wollen nun zeigen, dass die zwei Matrizen  $A(BC)$  und  $(AB)C$  gleich sind. Dafür müssen wir zeigen, dass alle ihre Koeffizienten gleich sind.

Wir berechnen also:

$$\begin{aligned} [A(BC)]_{ij} &= \sum_r A_{ir} (BC)_{rj} \\ &= \sum_r A_{ir} \left( \sum_s B_{rs} C_{sj} \right) \\ &= \sum_r \sum_s A_{ir} B_{rs} C_{sj} \quad (\text{Distributivität und Assoziativität in } K) \\ &= \sum_s \sum_r A_{ir} B_{rs} C_{sj} \quad (\text{Kommutativität und Assoziativität in } K) \\ &= \sum_s \left( \sum_r A_{ir} B_{rs} \right) C_{sj} \\ &= \sum_s (AB)_{is} C_{sj} \\ &= [(AB)C]_{ij}. \end{aligned}$$

### Bezeichnung 7.8.

Seien  $A$  eine  $n \times n$ -Matrix und  $k \in \mathbb{N}$ .

$A^k := \underbrace{A \cdots A}_{k\text{-mal}}$  (wohldefiniert).

## 8 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra I

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

### Kapitel 1: § 6 Elementare Matrizen

#### Notation

Sei  $e$  eine elementare Zeilenumformung auf eine  $m \times n$ -Matrix  $A$ . Mit  $e(A)$  bezeichnet man die  $m \times n$ -Matrix, die wir nun erhalten.

#### Untersuchung

**Typ 1:** Umtauschen von Zeilen  $Z_r$  und  $Z_s$  von  $A$ :

$$e(A)_{ij} = \begin{cases} A_{ij} & \text{für } i \neq r, i \neq s \\ A_{sj} & \text{für } i = r \\ A_{rj} & \text{für } i = s \end{cases}$$

**Typ 2:** Multiplizieren  $Z_r$  durch Skalar  $c \neq 0; c \in K$ :

$$e(A)_{ij} = \begin{cases} A_{ij} & \text{für } i \neq r \\ cA_{rj} & \text{für } i = r \end{cases}$$

**Typ 3:** Ersetzen von  $Z_r$  durch  $Z_r + cZ_s, c \in K; r \neq s$ :

$$e(A)_{ij} = \begin{cases} A_{ij} & \text{für } i \neq r \\ A_{rj} + cA_{sj} & \text{für } i = r \end{cases}$$

#### Definition 8.1.

Eine  $m \times m$ -Matrix in der Form  $e(I_m)$  ist *elementar*.

#### Beispiel 8.2.

Die  $2 \times 2$  elementaren Matrizen über  $K$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Typ1}$$

$$\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} \quad \text{Typ2, } c \neq 0, c \in K$$

$$\begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Typ3, } c \in K$$

#### Satz 8.3.

Sei  $e$  eine elementare Zeilenumformung und  $E$  die elementare Matrix  $E := e(I_m)$  und sei  $A$  eine  $m \times n$ -Matrix über  $K$ . Es gilt:  $e(A) = EA$ .

## Script 8: Lineare Algebra I

**Beweis** $e \in \text{Typ 1}, r \neq s$ (i)  $E_{ik} = \delta_{ik}$  für  $i \neq r, i \neq s$  und(ii)  $E_{rk} = \delta_{sk}$  für  $i = r$  und(iii)  $E_{sk} = \delta_{rk}$  für  $i = s$ Nun:  $(EA)_{ij} = \sum_{k=1}^m E_{ik} A_{kj}$ Fall (i):  $i \neq r; i \neq s$ 

$$\begin{aligned} (EA)_{ij} &= \sum_{k=1}^m \delta_{ik} A_{kj} \\ &= \delta_{ii} A_{ij} = A_{ij} \end{aligned}$$

Fall (ii):  $i = r$ 

$$\begin{aligned} (EA)_{ij} &= \sum_{k=1}^m E_{rk} A_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^m \delta_{sk} A_{kj} = \delta_{ss} A_{sj} = A_{sj} \end{aligned}$$

Fall (iii):  $i = s$ 

$$\begin{aligned} (EA)_{ij} &= \sum_{k=1}^m E_{sk} A_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^m \delta_{rk} A_{kj} = \delta_{rr} A_{rj} = A_{rj} \end{aligned}$$

□

 $e$  ist vom **Typ 2**: ÜA. $e$  ist vom **Typ 3**:  $r \neq s$ 

$$E_{ik} = \begin{cases} \delta_{ik} & \text{für } i \neq r \\ \delta_{rk} + c\delta_{sk} & \text{für } i = r \end{cases}$$

Also:  $(EA)_{ij} = \sum_{k=1}^m E_{ik} A_{kj}$ **Fall 1** $i \neq r$ 

$$\text{Dann } \sum_{k=1}^m E_{ik} A_{kj} = \sum_{k=1}^m \delta_{ik} A_{kj} = \delta_{ii} A_{ij} = A_{ij}$$

**Fall 2** $i = r$ 

$$\text{Dann } \sum_{k=1}^m E_{rk} A_{kj} = \sum_{k=1}^m (\delta_{rk} + c\delta_{sk}) A_{kj}$$

Hier bekommen wir nur zwei Terme (die möglicherweise ungleich Null sind) und zwar nur für  $k = r$  oder  $k = s$ .

$$k = r \Rightarrow \text{Also } k \neq s; \text{ also } c\delta_{sk} = 0; \text{ also } (\delta_{rk} + c\delta_{sk})A_{kj} = (\delta_{rr} + 0)A_{rj} = A_{rj}.$$

$$k = s \Rightarrow \text{Also } k \neq r; \text{ also } \delta_{rk} = 0; \text{ also } (\delta_{rk} + c\delta_{sk})A_{kj} = (0 + c\delta_{ss})A_{sj} = cA_{sj}.$$

$$\text{Also } \sum E_{rk} A_{kj} = \begin{cases} A_{ij} & \text{für } i \neq r \\ A_{rj} + cA_{sj} & \text{für } i = r \end{cases}.$$

□

## 9 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra I

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

### Korollar 9.1.

Seien  $A$  und  $B$   $m \times n$ -Matrizen über  $K$ . Es gilt:  $B$  ist zu  $A$  zeilenäquivalent gdw  $B = PA$ , wobei  $P$  das Produkt von  $m \times m$ -elementaren Matrizen ist.

### Beweis

“ $\Leftarrow$ ” Sei  $P = E_\ell \dots E_2 E_1$ , wobei  $E_t$  eine elementare  $m \times m$ -Matrix ist.

Also ist  $E_1 A$  zeilenäquivalent zu  $A$

und  $E_2(E_1 A)$  ist zeilenäquivalent zu  $E_1 A$ .

Also ist  $E_2 E_1 A$  zeilenäquivalent zu  $A$ .

So weiter fortsetzen:

$E_\ell \dots E_1 A$  ist zeilenäquivalent zu  $A$

i.e.  $B$  ist zeilenäquivalent zu  $A$ .

“ $\Rightarrow$ ” Sei  $B$  zeilenäquivalent zu  $A$  und seien  $e_1, \dots, e_\ell$  die elementaren Zeilenumformungen mit  $A \xrightarrow{e_1} \dots \xrightarrow{e_\ell} B$ .

Also  $E_\ell \dots E_2 E_1 A = B$ ,

wobei  $E_t$  die elementare Matrix  $e_t(I_m)$  für  $t = 1, \dots, \ell$  ist.

Setze  $P := E_\ell \dots E_2 E_1$ . □

### Definition 9.2.

Eine  $n \times n$ -Matrix  $A$  ist invertierbar, falls es eine  $n \times n$ -Matrix  $B$  gibt, so dass

$$AB = I_n \text{ und } BA = I_n.$$

In diesem Fall heißt  $B$  eine Inverse von  $A$ .

### Proposition 9.3.

Sei  $A$  invertierbar. Dann gibt es eine eindeutige Inverse.

### Beweis

Seien  $B_1, B_2$  beide Inverse von  $A$ . Es gilt:

$$AB_1 = I_n = AB_2$$

$$\text{also } B_2(AB_1) = B_2(AB_2) \quad (\text{Multiplikation})$$

$$\text{also } (B_2 A)B_1 = (B_2 A)B_2$$

$$\text{also } I_n B_1 = I_n B_2, \quad \text{i.e. } B_1 = B_2 \quad \square$$

### Notation

Wir bezeichnen mit  $A^{-1}$  die eindeutige Inverse der invertierbaren Matrix  $A$ .

**Proposition 9.4.**

Seien  $A, B$   $n \times n$ -Matrizen über  $K$ . Es gilt

- (i) Wenn  $A$  invertierbar, so auch  $A^{-1}$  und  $(A^{-1})^{-1} = A$ .
- (ii) Wenn  $A$  und  $B$  beide invertierbar, so auch  $AB$  und  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ .

**Beweis**

- (i) Wir berechnen  $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$ . Also ist  $A$  die Inverse von  $A^{-1}$ .
- (ii) Wir berechnen  $B^{-1}A^{-1}(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}I_nB = B^{-1}B \equiv I_n$ .  
Analog  $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = I_n$ . □

**Korollar 9.5.**

Seien  $A_1, \dots, A_\ell$   $n \times n$ -invertierbare Matrizen, dann ist das Produkt  $A_1 \cdots A_\ell$  auch invertierbar und es gilt  $(A_1 \cdots A_\ell)^{-1} = A_\ell^{-1} \cdots A_1^{-1}$  (\*)

**Beweis**

Induktion nach  $\ell$ . Für  $\ell = 1$  ist es klar.

Induktionsannahme: (\*) gilt für  $\ell$ .

Induktionsschritt: (\*) gilt für  $\ell + 1$ :

$$\begin{aligned} \text{Beweis: } (A_1 \cdots A_\ell A_{\ell+1})^{-1} &= \\ ((A_1 \cdots A_\ell) A_{\ell+1})^{-1} &= \leftarrow \text{ Proposition 9.4 (ii)} \\ A_{\ell+1}^{-1} (A_1 \cdots A_\ell)^{-1} &= \leftarrow \text{ Induktionsannahme} \\ A_{\ell+1}^{-1} (A_\ell^{-1} \cdots A_1^{-1}) &= \leftarrow \text{ Assoziativität} \\ A_{\ell+1}^{-1} A_\ell^{-1} \cdots A_1^{-1} & \quad \square \end{aligned}$$

**Proposition 9.6.**

Elementare Matrizen sind invertierbar.

**Beweis**

Sei  $E = e(I_n)$  eine elementare Matrix. Sei  $e^*$  die umgekehrte Zeilenumformung (auf die Zeilen von  $I_n$ ; siehe Bemerkungen 5.3 (I), 5.4 (i) und 5.5 (i)) und  $E^* := e^*(I_n)$ . Wir berechnen

$$E^*E = e^*(I_n)e(I_n) = I_n \quad \text{und} \quad E^*E = EE^* = I_n$$

D.h.  $E^* = E^{-1}$ . □

**Beispiel 9.7.**

$2 \times 2$ -elementare Matrizen

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & -c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -c & 1 \end{pmatrix} \\ c \neq 0 \\ \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} &= \begin{pmatrix} c^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c^{-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$



**Satz 9.8.**

Sei  $A$  eine  $n \times n$ -Matrix. Sind äquivalent:

- (i)  $A$  ist invertierbar.
- (ii)  $A\underline{X} = \underline{b}$  ist konsistent für jede  $n \times 1$ -Spaltenmatrix  $\underline{b}$ .
- (iii)  $A\underline{X} = \underline{0}$  hat nur die triviale Lösung.
- (iv)  $A$  ist zeilenäquivalent zu  $I_n$ .
- (v)  $A$  ist Produkt von elementaren Matrizen.

[(ii) und (iii): Beziehung zwischen homogener und allgemeiner (quadratischer) Systeme.]

**Beweis**

(i)  $\Rightarrow$  (ii)

Setze  $\underline{X} := A^{-1}\underline{b}$ . Es gilt  $A\underline{X} = A(A^{-1}\underline{b}) = (AA^{-1})\underline{b} = I_n\underline{b} = \underline{b}$ .

(iii)  $\Leftrightarrow$  (iv) schon bewiesen (Korollar 7.4).

(ii)  $\Rightarrow$  (iii)

Wenn  $A\underline{X} = \underline{0}$  nicht triviale Lösungen hätte, dann ist die r.Z.S.F.  $R$  von  $A$  nicht  $I_n$ , also muss eine Nullzeile haben (siehe Bemerkung 7.3 und Korollar 7.4). Also ist zum Beispiel das System

$$(S) \quad R\underline{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \text{ inkonsistent.}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} \dots & \dots & \dots & 0 \\ & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Nun  $\boxed{R = PA}$  wobei  $P$  das Produkt von elementaren Matrizen ist (Korollar 9.1). Also ist  $P$  invertierbar (Korollar 9.5 und Proposition 9.6).

Also multipliziere (S) durch  $P^{-1}$ :

$$(S) \quad (PA)\underline{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \text{ ist inkonsistent.}$$

$$\text{Also } P^{-1}(PA)\underline{X} = P^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \text{ ist inkonsistent.}$$

$$\text{Also } A\underline{X} = P^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \text{ inkonsistent.}$$

$$\underbrace{\begin{matrix} n \times n & n \times 1 \\ & n \times 1 \end{matrix}}$$

$$\text{Setze } \underline{b} = P^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ wir bekommen } A\underline{X} = \underline{b} \text{ inkonsistent. Widerspruch.}$$

(iv)  $\Rightarrow$  (V)

$A = P'I_n = P'$ , wobei  $P'$  das Produkt von elementaren Matrizen ist (Korollar 9.1).

(v)  $\Rightarrow$  (i)

Folgt aus Korollar 9.5 und Proposition 9.6. □

**Korollar 9.9.**

Seien  $A$  und  $B$   $m \times n$ -Matrizen.  $B$  ist zeilenäquivalent zu  $A$  genau dann, wenn  $B = PA$ , wobei  $P$  eine invertierbare  $m \times m$ -Matrix ist.

# 10 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra I

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

## Korollar 10.1.

Seien  $A$ , eine  $n \times n$ -Matrix, invertierbar. Eine Folge von elementaren Zeilenumformungen, die  $A$  zur Identitätsmatrix  $I_n$  reduzieren, reduziert  $I_n$  zu  $A^{-1}$ .

## Beweis

Die elementaren Zeilenumformungen werden durch Multiplikation (links) mit elementaren Matrizen erreicht, d.h.  $E_\ell \dots E_1 A = I_n$ . Aber dann gilt:  $A^{-1} = E_\ell \dots E_1 = E_\ell \dots E_1 I_n$ .  $\square$

## Beispiel 10.2.

$$(A \mid I_n) \rightarrow (I_n \mid A^{-1})$$

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \xrightarrow{(-2)Z_1 + Z_2} \\ \xrightarrow{(-1)Z_1 + Z_3} \end{array}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{2Z_2 + Z_3}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 2 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{(-1)Z_3}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \xrightarrow{3Z_3 + Z_2} \\ \xrightarrow{(-3)Z_3 + Z_1} \end{array}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -14 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{(-2)Z_2 + Z_1}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array} \right)$$

## Kapitel 2: § 1 Vektorräume

### Definition 10.3.

Sei  $K$  ein Körper,  $V \neq \emptyset$  eine nichtleere Menge, versehen mit zwei Verknüpfungen

(i) Skalarmultiplikation

$$\begin{aligned} \bullet & : K \times V \rightarrow V \\ (c, v) & \mapsto cv \text{ und} \end{aligned}$$

(ii) Vektorsumme

$$\begin{aligned} + & : V \times V \rightarrow V \\ (v_1, v_2) & \mapsto v_1 + v_2 \end{aligned}$$

Das Triple  $(V, \bullet, +)$  ist ein  $K$ -Vektorraum ( $K$ -VR) oder ein Vektorraum über  $K$  (VR/ $K$ ), falls die folgenden Axiome erfüllt sind:  $(V, +)$  ist eine abelsche Gruppe und

$$\left. \begin{aligned} 1 \cdot \alpha &= \alpha & \forall \alpha \in V \\ (c_1 c_2) \alpha &= c_1 (c_2 \alpha) & \forall c_1, c_2 \in K \\ c(\alpha_1 + \alpha_2) &= c\alpha_1 + c\alpha_2 & \forall \alpha_1, \alpha_2 \in V \\ (c_1 + c_2)\alpha &= c_1\alpha + c_2\alpha & \forall c \in K \end{aligned} \right\}$$

### Beispiel 10.4.

$V = K^n$  mit koordinatenweisen Verknüpfungen.

### Beispiel 10.5.

Allgemeiner:  $K^{m \times n} := \text{Mat}_{m \times n}(K) :=$  die Menge aller  $m \times n$ -Matrizen mit Koeffizienten aus  $K$  und Matrixsumme und skalarvielfach.

### Beispiel 10.6.

Sei  $S$  eine Menge.

$$V := \{f; f : S \rightarrow K; f \text{ Abbildung}\}$$

$V := K^S$  mit Funktionensummen und skalarvielfach.

Beispiele 10.4 und 10.5 sind Sonderfälle von Beispiel 10.6.

### Beispiel 10.7.

Der VR der Polynomfunktionen über  $K$

$$f(x) = c_0 + c_1 x^1 + \dots + c_n x^n, c_i \in K.$$

**Beispiel 10.8.**

$K / k$  eine Körpererweiterung.

**Proposition 10.9.**

Für  $c \in K, \alpha \in V$

$$(1) \quad c \cdot 0 = 0$$

$$(2) \quad 0 \cdot \alpha = 0$$

$$(3) \quad c \cdot \alpha = 0 \Rightarrow c = 0 \text{ oder } \alpha = 0$$

$$(4) \quad (-1) \cdot \alpha = -\alpha$$

**Definition 10.10.**

Seien  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in V$ ;  $\alpha \in V$  ist eine *lineare Kombination* (von  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ ), wenn es  $c_1, \dots, c_n \in K$  gibt mit  $\alpha = \sum_{i=1}^n c_i \alpha_i$ .

**Proposition 10.11.**

$$\sum c_i \alpha_i + \sum d_i \alpha_i = \sum (c_i + d_i) \alpha_i$$

$$c \sum c_i \alpha_i = \sum (cc_i) \alpha_i.$$

# 11 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra I

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

## Kapitel 2: § 2 Unterräume

### Definition 11.1.

Sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und  $W \subseteq V$  eine Teilmenge.  $W$  ist ein *Teilraum*, falls  $(W, +, \bullet)$  ein  $K$ -Vektorraum ist (mit der Einschränkung der Verknüpfung von  $V$  auf  $W$  i.e. es sollen gelten  $+ : W \times W \rightarrow W$  und  $\bullet : K \times W \rightarrow W$  und auch die Vektorraumaxiome).

Dazu sind nachzurechnen:

$$\begin{aligned} 0_V \in W; & & \alpha, \beta \in W & \Rightarrow & \alpha + \beta \in W \\ & & c \in K, \alpha \in W & \Rightarrow & c\alpha \in W \\ (\text{insbesondere } & \alpha \in W & & \Rightarrow & -\alpha \in W) \end{aligned}$$

Also gibt es ein einfaches Kriterium.

### Satz 11.2.

Sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum,  $\emptyset \neq W \subseteq V$  eine Teilmenge. Dann ist  $W$  ein Unterraum von  $V$  genau dann, wenn für alle  $\alpha, \beta \in W, c \in K : \alpha + c\beta \in W$ .

### Beispiel 11.3.

- (1) Ist  $V$  ein  $K$ -Vektorraum, so sind  $V$  und  $\{0_V\}$  Unterräume von  $V$ .
- (2)  $V = K^n$   
 $W := \{(x_1, \dots, x_n) \in K^n \mid x_1 = 0\}$  ist Unterraum, aber  $X := \{(x_1, \dots, x_n) \in K^n \mid x_1 = 1 + x_2\}$  nicht!  
 (E.g.  $(0, \dots, 0) \notin X$ ).
- (3) Die Symmetrischen  $n \times n$ -Matrizen über  $K$  ( $A_{ij} = A_{ji}$  für  $1 \leq i, j \leq n$ )  
 Seien  $A, B \in \text{Sym}_{n \times n}(K); c \in K$ , dann ist  
 $(A + cB)_{ij} = A_{ij} + (cB)_{ij} = A_{ij} + cB_{ij} = A_{ji} + cB_{ji} = A_{ji} + (cB)_{ji} = (A + cB)_{ji}$ .  
 Also  $A + cB \in \text{Sym}_{n \times n}(K)$  wie gewünscht.
- (4) Ein sehr wichtiges Beispiel!  
 Der Lösungsraum eines homogenen LGS:  $A$  sei eine  $m \times n$ -Matrix über  $K$ . Dann ist

$$\{X \in \text{Mat}_{n \times 1}(K) \mid AX = 0\}$$

ein Unterraum von  $\text{Mat}_{n \times 1}(K)$ .

#### Beweis:

Ist  $A \in \text{Mat}_{m \times n}(K), B, C \in \text{Mat}_{n \times p}(K), d \in K$ , so ist  
 $A(B + dC) = AB + dAC$ .

(4) Denn

$$\begin{aligned} [A(B + dC)]_{ij} &= \sum_{k=1}^n A_{ik}(B + dC)_{kj} = \sum A_{ik}(B_{kj} + (dC)_{kj}) \\ &= \sum A_{ik}B_{kj} + \sum A_{ik}(dC)_{kj} = \sum A_{ik}B_{kj} + \sum dA_{ik}C_{kj} \\ &= (AB)_{ij} + d \sum A_{ik}C_{kj} = (AB)_{ij} + d(AC)_{ij}. \end{aligned}$$

Insbesondere:

$$\text{Ist } AX_1 = AX_2 = 0, \text{ so auch } A(X_1 + dX_2) = 0. \quad \square$$

#### Definition 11.4.

Sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und  $X \subseteq V$ . Eine lineare Kombination von Elementen aus  $X$  ist eine (endliche) Summe  $\sum_{v \in X} c_v v$  mit  $c_v \in K$ , wobei  $c_v = 0$  für alle bis auf endliche viele  $v$ .

Damit können wir nun definieren

#### Definition 11.5.

Sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und  $X \subseteq V$ . Dann ist  $\text{span}(X)$ , der von  $X$  aufgespannte oder erzeugte Unterraum, definiert als

$$\text{span}(X) := \left\{ \sum_{v \in X} c_v v \mid c_v \in K \text{ und } c_v = 0 \text{ für alle bis auf endliche viele } v \in X \right\}.$$

**Konvention:**  $\text{span}(\emptyset) = \{0\}$ .

#### Proposition 11.6.

Für jede  $X \subseteq V$  ist  $\text{span}(X)$  ein Unterraum.

#### Beweis

$\text{span} \emptyset = \{0\}$ . Sonst  $X \neq \emptyset \Rightarrow \text{span}(X) \neq 0$ . Seien  $\alpha = \sum_{v \in X} c_v v$ ,  $\beta = \sum_{v \in X} d_v v \in \text{span}(X)$ . Sei  $c \in K$ . Also  $\alpha + c\beta = \sum_{v \in X} (c_v + cd_v)v \in \text{span}(X)$ .  $\square$

Es ist sogar der "kleinste" Unterraum der  $X$  enthält. Das ist unser nächstes Ziel.

#### Satz 11.7.

Sei  $V$  ein  $K$ -VR, und  $\chi$  eine Menge von Unterräumen. Dann ist  $\bigcap \chi$  ein Unterraum von  $V$ .

#### Beweis

$$\bigcap \chi := \bigcap_{W \in \chi} W.$$

$0_v \in W$  für alle  $W \in \chi$  also  $0_v \in \bigcap \chi \neq \emptyset$ .

Sind  $\alpha, \beta \in \bigcap \chi$ ,  $c \in K$ , so sind für jedes  $W \in \chi$  auch  $\alpha, \beta \in W$ , also  $\alpha + c\beta \in W$ . Daraus folgt  $\alpha + c\beta \in \bigcap \chi$ .  $\square$

Es sei nun für  $X \subseteq V$   $L(X)$  definiert als

$$L(X) := \bigcap \{W \subseteq V \mid W \text{ ist ein Unterraum und } X \subseteq W\}.$$

**Satz 11.8.**

Für  $X \subseteq V$  ist  $L(X) = \text{span}(X)$ .

**Beweis**

$X = \emptyset$ :  $L(X) := \bigcap \{W \subseteq V \mid W \text{ Unterraum}\} = \{0\} = \text{span}(\emptyset)$ .

$X \neq \emptyset$ :

(1)  $L(X) \subseteq \text{span}(X)$ :

$\text{span}(X) \subseteq V$  ist ein Unterraum und  $X \subseteq \text{span}(X)$ . Also  $\text{span}(X) \in \{W \subseteq V \mid W \text{ ein Unterraum und } X \subseteq W\}$ .

Also  $v \in L(X) \Rightarrow v \in \bigcap \{W \mid W \text{ ein Unterraum und } X \subseteq W\} \Rightarrow v \in \text{span}(X)$ .

(2)  $\text{span}(X) \subseteq L(X)$ :

Sei  $v \in \text{span}(X)$ ,  $W \subseteq V$  ein Unterraum und  $X \subseteq W$ .

Da  $v \in \text{span}(X)$ , existiert  $(c_x; x \in X)$  ( $c_x \in K$  für alle  $x \in X$ ) mit  $v = \sum_{x \in X} c_x x$ , wobei  $c_x = 0$  für alle bis auf endlich viele  $x$ . Da  $W$  ein Unterraum ist und  $X \subseteq W$ , ist  $\sum_{x \in X} c_x x = v \in W$ .

Da  $W$  beliebig war, ist  $v$  Element von jedem Unterraum mit diesen Eigenschaften, also auch des Durchschnitts.  $\square$

Wir können auch mehrere Unterräume zusammenfassen:

**Definition 11.9.**

Seien  $S_1, \dots, S_k \subseteq V$ ,  $V$  ein  $K - VR$ .

Dann ist  $S_1 + \dots + S_k := \{x_1 + \dots + x_k \mid x_i \in S_i; 1 \leq i \leq k\}$

kurz auch  $\sum_{i=1}^k S_i := \{\sum_{i=1}^k x_i \mid x_i \in S_i; 1 \leq i \leq k\}$ .

**Korollar 11.10.**

Seien  $W_1, \dots, W_k$  Unterräume von  $V$ . Dann ist  $W := \sum_{i=1}^k W_i$  ein Unterraum von  $V$  und  $W_i \subseteq W$  für  $1 \leq i \leq k$ .

**Beweis**

Übungsaufgabe  $\square$

**Korollar 11.11.**

Sind  $W_1, \dots, W_k$  Unterräume von  $V$ , so ist  $W := \sum_{i=1}^k W_i = \text{span}(\bigcup_{i=1}^k W_i)$ .

**Beweis**

" $\subseteq$ ": Sei  $v \in \sum W_i$ . Also existiert  $w_i, i \in \{1, \dots, k\}$  mit  $w_i \in W_i$  und  $v = \sum w_i$ . Dann ist  $w_i \in \bigcup_{j=1}^k W_j$  für jedes  $1 \leq i \leq k$ .

Also  $v = \sum w_i \in \text{span}(\bigcup_{j=1}^k W_j)$ .

" $\supseteq$ ": Sei  $v \in \text{span}(\bigcup W_i)$ . Dann existiert  $(c_i; i \leq k)$  und  $(w_i \mid i \leq k)$  mit  $c_i \in K; w_i \in W_i$ , so dass  $v = \sum c_i w_i$ .

(Bemerkung: Aus jedem  $W_i$  können mehrere Elemente stammen. Die müssen wir dann erst zusammenfassen!)

Da  $W_i$  Unterräume sind, ist mit  $w_i \in W_i$  auch  $c_i w_i \in W_i$ . Also existiert  $(w'_i \mid i \leq k)$  mit  $w'_i \in W_i$  und  $v = \sum w'_i$  (nämlich  $w'_i := c_i w_i$ ).

also  $v \in \sum W_i$ .  $\square$



**Beispiel 11.12.**

Sei  $K \subseteq \mathbb{R}$  ein Teilkörper, ferner

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_1 := (1, 2, 0, 3, 0) \\ \alpha_2 := (0, 0, 1, 4, 0) \\ \alpha_3 := (0, 0, 0, 0, 1) \end{array} \right\} \in K^5$$

$\alpha \in \text{span}(\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\})$  genau dann, wenn  $c_1, c_2, c_3 \in K$  existiert mit  $\alpha = \sum_{i=1}^3 c_i \alpha_i$ , also hat  $\alpha$  damit die Form  $(c_1, 2c_1, c_2, 3c_1 + 4c_2, c_3)$

$\text{span}(\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}) = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in K^5; x_2 = 2x_1, x_4 = 3x_1 + 4x_2\}$ .

# 12 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra I

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

## Kapitel 2: § 3 Basen und Dimension

### Definition 12.1.

Sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum.  $S \subseteq V$  ist *linear abhängig* (l.a.) über  $K$ , falls verschiedene  $v_1, \dots, v_n \in S$  und skalaren  $c_1, \dots, c_n \in K$  nicht alle Null existieren mit  $c_1v_1 + \dots + c_nv_n = 0$ .

$S$  ist linear *unabhängig* (l.u.) über  $K$ , falls  $S$  nicht linear abhängig ist (e.g.  $\emptyset$  ist linear unabhängig).

### Konvention

Sei  $S = \{v_1, \dots, v_n\}$  endlich. Wir sagen:  $v_1, \dots, v_n$  linear unabhängig / linear abhängig.

### Bemerkung 12.2.

1.  $S_1 \subseteq S_2$  und  $S_1$  l. a.  $\Rightarrow S_2$  l. a. also
2.  $S_1 \subseteq S_2$  und  $S_2$  l.u.  $\Rightarrow S_1$  linear unabhängig.

### Beispiel 12.3.

3. (i)  $0 \in S \Rightarrow S$  l.a. (weil  $1 \cdot 0 = 0$ )  
 (ii)  $\{v\}$  ist linear abhängig genau dann, wenn  $v = 0$   
 (iii)  $\{v_1, v_2\}$  ist linear abhängig genau dann, wenn  $v_1 = cv_2$  für ein  $c \in K$
4.  $S$  ist linear unabhängig genau dann, wenn jede endliche Teilmenge von  $S$  ist linear unabhängig, d.h. genau dann, wenn für verschiedene Vektoren  $v_1, \dots, v_n \in S$  und alle  $c_1, \dots, c_n \in K$  aus  $\sum c_iv_i = 0$  folgt  $c_i = 0$  für  $1 \leq i \leq n$ .

### Beispiel 12.4.

$$\left. \begin{array}{l} v_1 = (3, 0, -3) \\ v_2 = (-1, 1, 2) \\ v_3 = (4, 2, -2) \\ v_4 = (2, 1, 1) \end{array} \right\} \in \mathbb{R}^3$$

$2v_1 + 2v_2 - v_3 + 0 \cdot v_4 = 0 \Rightarrow$  l.a. über  $\mathbb{R}$ .

### Beispiel 12.5.

Seien  $\beta_1 = (1, 1, 2), \beta_2 = (1, 0, 1), \beta_3 = (2, 1, 3)$ . Ist  $\text{span}(\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}) = \mathbb{R}^3$  ?

Sei  $\underline{b} = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$ , können wir  $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$  finden mit

$$(b_1, b_2, b_3) = c_1(1, 1, 2) + c_2(1, 0, 1) + c_3(2, 1, 3).$$

D.h.: Hat das LGS

$$\begin{array}{rclcl} c_1 & + & c_2 & + & 2c_3 & = & b_1 \\ c_1 & & & + & c_3 & = & b_2 \\ 2c_1 & + & c_2 & + & 3c_3 & = & b_3 \end{array}$$

eine Lösung für **jede**  $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$  ?

Satz 9.8  $\Rightarrow$  dies ist der Fall genau dann, wenn

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

invertierbar ist.

### Beispiel 12.6.

$v_1 = (1, -2, 3), v_2 = (5, 6, -1), v_3 = (3, 2, 1)$  linear abhängig?

Betrachte  $c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3 = 0$ . Also homogene LGS:

$$\left. \begin{array}{l} c_1 + 5c_2 + 3c_3 = 0 \\ -2c_1 + 6c_2 + 2c_3 = 0 \\ 3c_1 - c_2 + c_3 = 0 \end{array} \right\} v_1, v_2, v_3 \text{ l. a., gdw es keine triviale Lösung gibt.}$$

Also  $v_1, v_2, v_3$  sind linear unabhängig genau dann, wenn

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ -2 & 6 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

invertierbar ist (Satz 9.8).

### Definition 12.7.

Sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum. Eine *Basis* für  $V$  ist eine linear unabhängige Teilmenge, die  $V$  erzeugt.  $V$  ist *endlich dimensional*, falls es eine endliche Basis für  $V$  gibt, i.e.

$S = \{v_1, \dots, v_n\} \subseteq V$  mit

(i)  $S$  linear unabhängig

(ii)  $\text{span}(S) = V$ .

### Beispiel 12.8.

$V = K^n$ . Die Standardbasis ist  $\{e_i; i = 1, \dots, n\}$ , wobei  $e_i = (0, \dots, 1, 0, \dots, 0)$ ;  $1 \rightarrow i$ -te Stelle.

### Satz 12.9.

Sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum, so dass  $V$  endlich erzeugt ist, i.e.

ex.  $\beta_1, \dots, \beta_m \in V$  mit  $\text{span}(\{\beta_1, \dots, \beta_m\}) = V$ . Dann ist jede linear unabhängige Teilmenge endlich und hat höchstens  $m$  Elemente.

### Beweis

Wir zeigen: Hat  $S \subseteq V$  mehr als  $m$  Elemente, dann ist  $S$  linear abhängig.

Seien  $v_1, \dots, v_n \in S; n > m$ .

$\forall j = 1, \dots, n, v_j \in \text{span}(\{\beta_1, \dots, \beta_m\})$ , also für  $j = 1, \dots, n$  ex.  $A_{1j}, \dots, A_{mj} \in K$  mit

$$v_j = \sum_{i=1}^m A_{ij} \beta_i.$$

Wir analysieren nun lineare Kombinationen der  $v_j; 1 \leq j \leq n$ .

Für  $x_1, \dots, x_n \in K$  berechne

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n x_j v_j &= \sum_{j=1}^n x_j \sum_{i=1}^m A_{ij} \beta_i = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m (A_{ij} x_j) \beta_i \\ &= \sum_{i=1}^m \left( \sum_{j=1}^n A_{ij} x_j \right) \beta_i \end{aligned}$$

(\*)

## Script 12: Lineare Algebra I

Betrachte das homogene LGS in  $m$  Gleichungen und  $n$  Unbekannten  $x_1, \dots, x_n$ :

$$\sum_{j=1}^n A_{ij}x_j = 0 \quad 1 \leq i \leq m \quad (**)$$

$n > m$  also Satz (Korollar 7.2) impliziert, dass es nicht triviale Lösungen gibt.

Also ex.  $x_1, \dots, x_n \in K$  nicht alle Null, so dass  $\sum_{j=1}^n A_{ij}x_j = 0$  für alle  $1 \leq i \leq m$ .

Zurück in (\*) ergibt l.a. der  $v_j; 1 \leq j \leq n$ . □

# 13 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra I

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

## Korollar 13.1.

Sei  $V$  endlich dim Vektorraum über  $K$ . Es gilt: Alle Basen haben dieselbe Kardinalität.

## Beweis

Seien Basen  $\left. \begin{array}{l} \mathcal{B}_1 = \{\beta_1, \dots, \beta_m\} \\ \mathcal{B}_2 = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{erzeugt} \\ \text{linear unabhängig} \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \mathcal{B}_1 \\ \mathcal{B}_2 \end{array}} \right\} \begin{array}{l} \text{linear unabhängig} \\ \text{erzeugt} \end{array}$

Satz 12.9 impliziert  $n \leq m$  und auch  $m \leq n$ , also  $m = n$  □

Wir können nun eindeutig  $\dim V$  definieren.

## Definition 13.2.

Sei  $V$  endlich dim.  $K$ -Vektorraum.

$\dim V := |\mathcal{B}|$   $\mathcal{B}$  eine Basis für  $V$ .

Wir können nun den Satz 12.9 umformulieren.

## Korollar 13.3.

Sei  $V$  ein endlich dim Vektorraum;  $n := \dim V$ .

- Jede Teilmenge mit mehr als  $n$  Elementen ist linear abhängig. (Eine linear unabhängige Teilmenge hat  $\leq n$  Elemente.)
- Jede Teilmenge mit weniger als  $n$  Elementen ist nicht erzeugend. (Eine erzeugende Teilmenge hat  $\geq n$  Elemente.)

## Beispiel 13.4.

- $V = \{0\}$ ,  $\mathcal{B} = \emptyset$ ,  $\dim V = |\emptyset| = 0$
- $\dim K^n = n$ , weil die Standardbasis  $\mathcal{E} := \{e_1, \dots, e_n\}$  hat  $|\mathcal{E}| = n$ .
- $K^{m \times n} = \text{Mat}_{m \times n}$  hat die Dimension  $mn$ : Die  $mn$ -Matrizen mit einer 1 in der  $ij$ -ten Stelle und 0 sonst ist eine Basis.

## Korollar 13.5.

- $V = K^{\mathbb{N}} := \{f \mid f : \mathbb{N} \rightarrow K\}$  ist **nicht** endlich dim, weil die Elemente

$$f_i : \mathbb{N} \rightarrow K$$

$$f_i(n) := \begin{cases} 1 & n = i \\ 0 & n \neq i \end{cases}$$

eine unendliche linear unabhängige Teilmenge definieren, nämlich

$$S := \{f_i \mid i \in \mathbb{N}\}.$$

Seien  $i_1 < \dots < i_k$  und  $c_1 f_{i_1} + \dots + c_k f_{i_k} = 0$ , so ist

$$(c_1 f_{i_1} + \dots + c_k f_{i_k})(i_l) = c_l = 0, \text{ für alle } l = 1, \dots, k.$$

**Lemma 13.6.**

(Fortsetzung Lemma)

Sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum. Sei  $S$  linear unabhängig in  $V$  und  $\beta \notin \text{span}(S)$ . Dann ist  $S \cup \{\beta\}$  linear unabhängig.

**Beweis**

Seien  $c_1, \dots, c_m, b \in K$  mit  $c_1\alpha_1 + \dots + c_m\alpha_m + b\beta = 0$ .

Behauptung:  $b = 0$ , sonst  $b\beta = (-c_1)\alpha_1 + \dots + (-c_m)\alpha_m, b \neq 0$ .

Also  $\beta = [(-c_i)b^{-1}]\alpha_1 + \dots + [(-c_m)b^{-1}]\alpha_m \Rightarrow \beta \in \text{span}(S)$  - Widerspruch.

Also  $b = 0$ .

Also  $\sum c_i\alpha_i = 0$  und  $S$  ist linear unabhängig  $\Rightarrow c_i = 0$ , für alle  $1 \leq i \leq m$ . □

**Satz 13.7.**

Sei  $V$  ein endlich dim  $K$ -Vektorraum und  $W \subseteq V$  ein Unterraum. Jede linear unabhängige Teilmenge von  $W$  ist endlich und ist Teil einer (endlichen) Basis für  $W$ .

**Beweis**

Sei  $S \subseteq W$  linear unabhängig und beobachte:  $S \subseteq V$  ist linear unabhängig. Also  $|S| \leq \dim V$ .

Sei nun  $S_0 \subseteq W$  linear unabhängig. Wir setzen  $S_0$  zu einer Basis für  $W$  fort wie folgend.

Betrachte  $\text{span}(S_0) \subseteq W$ . Unterraum.

Falls = dann ist  $S_0$  bereits eine Basis.

Fall  $\neq$ , sei  $\beta_1 \in W; \beta_1 \notin \text{span}(S_0)$ . Setze  $S_1 := S_0 \cup \{\beta_1\}$  linear unabhängig (Lemma 13.6).

Wiederhole:  $S_1 \cup \{\beta_2\} := S_2$  linear unabhängig usw.

In höchstens  $\dim V$  vielen Schritten erreichen wir  $S_m = S_0 \cup \{\beta_1, \dots, \beta_m\}$ , wofür  $\text{span}(S_m) = W$  sein muss!

Ferner  $S_m$  linear unabhängig, also  $S_m$  Basis für  $W$ . □

**Korollar 13.8.**

Sei  $W$  ein **echter** Unterraum vom endlich dim  $K$ -Vektorraum  $V$  (i.e.  $W \subsetneq V$ ). Dann ist  $W$  endlich dim und  $\dim W < \dim V$ .

**Beweis**

Setze  $S_0 = \emptyset$  und setze fort wie im Beweis von Satz. Wir erhalten eine Basis  $S_m$  von  $W$ ;

$\text{span}(S_m) = W$  in  $m \leq \dim V$  vielen Schritten. Also  $m := \dim W \leq \dim V$ .

Aber  $W$  echt; ex.  $\beta \notin W$ , i.e.  $\beta \notin \text{span}(S_m)$ . Also  $S_m \cup \{\beta\}$  linear unabhängig; so  $m+1 \leq \dim V$ .

Also  $m < \dim V$ . □

**Korollar 13.9. (Basis Ergänzung)**

Sei  $V$  endlich dim Vektorraum über  $K$ . Jede linear unabhängige Teilmenge ist Teil einer Basis.

**Korollar 13.10.**

Seien  $W_1, W_2$  endlich dim  $K$ -Vektorräume. ( $W_1 \subseteq V$  und  $W_2 \subseteq V$  Unterräume.) Es gilt  $W_1 + W_2$  ist endlich dim und  $\dim W_1 + \dim W_2 = \dim(W_1 \cap W_2) + \dim(W_1 + W_2)$ .

**Beweis**

Satz und Korollare implizieren, dass  $W_1 \cap W_2$  eine endliche Basis  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$  hat und  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_1, \dots, \beta_m\}$  Basis für  $W_1$ ,  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k, \delta_1, \dots, \delta_n\}$  Basis für  $W_2$  für geeignete  $\underbrace{\beta_1, \dots, \beta_m}_{\in W_1}, \underbrace{\delta_1, \dots, \delta_n}_{\in W_2}$ .

Der Vektorraum  $W_1 + W_2$  wird von  $\alpha_1, \dots, \alpha_k; \beta_1, \dots, \beta_m; \delta_1, \dots, \delta_n$  erzeugt.

**Behauptung**

Diese Vektoren sind linear unabhängig.

**Beweis**

$$\sum x_i \alpha_i + \sum y_j \beta_j + \sum z_r \delta_r = 0 \quad (*)$$

$$\Rightarrow -\sum z_r \delta_r = \sum x_i \alpha_i + \sum y_j \beta_j.$$

Also  $\sum z_r \delta_r \in W_1$ . Aber auch  $\in W_2$  per Definition. Also  $\in W_1 \cap W_2$ .

Also  $\sum z_r \delta_r = \sum c_i \alpha_i$  für geeignete  $c_1, \dots, c_k \in K$ .

Aber  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k, \delta_1, \dots, \delta_n\}$  sind linear unabhängig  $\Rightarrow z_r = 0$ , für alle  $1 \leq r \leq n$ .

Also  $\sum x_i \alpha_i + \sum y_j \beta_j = 0$  in (\*) und  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_1, \dots, \beta_m\}$  sind linear unabhängig  $\Rightarrow x_i = 0$  und  $y_j = 0$ , für alle  $1 \leq i \leq k$  und  $1 \leq j \leq m$ .

Also  $\dim W_1 + \dim W_2 = (k + m) + (k + n) = k + (m + k + n)$ .  $\square$

# 14 Skript zur Vorlesung: Lineare Algebra I

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

## Kapitel 2: § 4 Koordinaten

### Definition 14.1.

Sei  $V$  endlich dim  $K$ -Vektorraum;  $\dim V = n$ .

Eine *geordnete Basis* ist ein  $n$ -Tupel  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ;  $\alpha_i \in V$ , so dass  $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$  eine Basis ist.

### Notation und Terminologie

Wir schreiben  $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$  ist eine geordnete Basis. (Wir werden nicht  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  schreiben.)

### Lemma 14.2.

Sei  $V$  ein endlich dim  $K$ -Vektorraum;  $\alpha \in V$ , dann existiert ein eindeutiges  $n$ -Tupel  $(x_1, \dots, x_n) \in K^n$  mit  $\alpha = \sum_{i=1}^n x_i \alpha_i$ .

### Beweis

$$\alpha = \sum z_i \alpha_i \Rightarrow \sum_{i=1}^n (x_i - z_i) \alpha_i = 0 \Rightarrow x_i - z_i = 0 \Rightarrow x_i = z_i, \text{ für alle } 1 \leq i \leq n. \quad \square$$

### Definition 14.3.

(1)  $x_i$  ist die  $i$ -te Koordinate von  $\alpha$  bezüglich  $\mathcal{B}$ .

(2)  $(x_1, \dots, x_n)$  ist das Koordinaten-Tupel von  $\alpha$  bezüglich  $\mathcal{B}$ .

### Definition 14.4.

$V, W$  sind  $K$ -Vektorräume.

(1)  $T : V \rightarrow W$  ist eine *lineare Abbildung* (oder *Transformation*), falls

(a)  $T(\alpha + \beta) = T(\alpha) + T(\beta)$

(b)  $T(c\alpha) = cT(\alpha)$ ;

$\alpha, \beta \in V; c \in K$ ; (a) und (b) sind äquivalent zu:  $\forall \alpha, \beta \in V, \forall c \in K$

(c)  $T(c\alpha + \beta) = cT(\alpha) + T(\beta)$

### Bemerkung

$$\left. \begin{array}{l} T(0) = T(0+0) \\ T(0) = T(0) + T(0) \end{array} \right\} \Rightarrow T(0) = 0.$$

(2)  $T$  ist eine *Isomorphie* oder ein *Isomorphismus*, falls  $T$  ferner bijektiv ist.

### Notation

$$V \stackrel{T}{\simeq} W \text{ oder } V \simeq W$$



**Terminologie**

$V$  und  $W$  sind isomorph.

**Lemma 14.5.**

Sei  $T$  eine lineare Transformation. Dann ist  $T$  injektiv genau dann, wenn  $\forall \alpha (T(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha = 0)$ .

**Beweis**

" $\Rightarrow$ "  $T$  ist injektiv und  $T(\alpha) = 0 = T(0)$ . Also  $\alpha = 0$ .

" $\Leftarrow$ " Sei  $T(\alpha_1) = T(\alpha_2)$ , dann  $T(\alpha_1) - T(\alpha_2) = 0$ , i.e.  $T(\alpha_1 - \alpha_2) = 0$ .  
Also  $\alpha_1 - \alpha_2 = 0$  und  $\alpha_1 = \alpha_2$ . □

**Satz 14.6.**

$\dim V = n, V$  ein  $K$ -Vektorraum,  $\Rightarrow V \simeq K^n$ .

**Beweis**

Sei  $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$  eine geordnete Basis. Definiere  $T : V \rightarrow K^n$

$$\alpha \mapsto \underbrace{(x_1, \dots, x_n)}$$

:= Koordinaten-Tupel von  $\alpha$  bezüglich  $\mathcal{B}$ .

$$T(\alpha + \beta) \stackrel{?}{=} T(\alpha) + T(\beta).$$

Sei  $\alpha = \sum x_i \alpha_i, \beta = \sum y_i \alpha_i, \alpha + \beta = \sum (x_i + y_i) \alpha_i$  eindeutig  $\Rightarrow T(\alpha + \beta) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) = (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = T(\alpha) + T(\beta)$ .

Analog  $T(c\alpha) = cT(\alpha)$ .

$T(\alpha) = (0, \dots, 0) \Rightarrow \alpha = 0$ , weil  $x_1 = \dots = x_n = 0$ .

So  $T$  injektiv.

Sei  $(x_1, \dots, x_n) \in K^n$ . Setze  $\alpha := \sum x_i \alpha_i \in V$ . Es gilt  $T(\alpha) = (x_1, \dots, x_n)$ .

So  $T$  surjektiv. □

**Notation**

Koordinaten Spaltenmatrix von  $\alpha$  bezüglich  $\mathcal{B}$ :

$$[\alpha]_{\mathcal{B}} := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

# 15 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra I

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

## Beispiel 15.1.

$$V = \mathbb{R}^3; \quad \mathcal{B} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_1 = (1, 2, 1) \\ \alpha_2 = (2, 9, 0) \\ \alpha_3 = (3, 3, 4) \end{array} \right\} \text{ eine Basis weil } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 9 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ invertierbar.}$$

Finde

$$(i) \alpha \in \mathbb{R}^3 \text{ mit } [\alpha]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

und finde

$$(ii) [\alpha]_{\mathcal{B}} \text{ für } \alpha = (5, -1, 9).$$

Zu (i):  $\alpha = -\alpha_1 + 3\alpha_2 + 2\alpha_3 = (11, 31, 7)$

Zu (ii): Finde  $x_1, x_2, x_3$  mit  $\alpha = \sum_{i=1}^3 x_i \alpha_i$  d.h.

$$(5, -1, 9) = x_1(1, 2, 1) + x_2(2, 9, 0) + x_3(3, 3, 4)$$

Löse LGS:

$$\begin{array}{rcl} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 5 \\ 2x_1 & + & 9x_2 & + & 3x_3 & = & -1 \\ x_1 & & & + & 4x_3 & = & 9 \end{array}$$

Lösung:  $x_1 = 1 \quad x_2 = -1 \quad x_3 = 2$

$$[\alpha]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Was ist der Zusammenhang zwischen  $[\alpha]_{\mathcal{B}}$  und  $[\alpha]_{\mathcal{B}'}$  für  $\mathcal{B}$  und  $\mathcal{B}'$  geordnete Basen?

## Bemerkung 15.2.

$$[\alpha]_{\mathcal{B}} = 0 \Leftrightarrow [\alpha]_{\mathcal{B}'} = 0.$$

Sei  $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$  und  $\mathcal{B}' = \{\alpha'_1, \dots, \alpha'_n\}$ .

Schreibe  $\alpha'_j = \sum_{i=1}^n p_{ij} \alpha_i$   $p_{ij} \in K$  - eindeutig

$$\text{d.h. } [\alpha'_j]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} p_{1j} \\ \vdots \\ p_{nj} \end{pmatrix}.$$

Nun sei  $\alpha \in V$  beliebig und  $[\alpha]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \text{Also } \alpha &= \sum_{j=1}^n x'_j \alpha'_j = \sum_{j=1}^n x'_j \sum_{i=1}^n p_{ij} \alpha_i = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n (p_{ij} x'_j) \alpha_i \\ &= \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n p_{ij} x'_j \right) \alpha_i. \end{aligned} \quad (*)$$

Es folgt aus (\*), dass die  $i$ -te Koordinate von  $\alpha$  bezüglich  $\mathcal{B}$  ist:

$$x_i = \sum_{j=1}^n p_{ij} x'_j \quad 1 \leq i \leq n \quad (**)$$

Sei  $P$  die  $n \times n$ -Matrix mit  $ij$ -tem Koeffizient  $p_{ij}$ . Wir schreiben (\*\*) um:  $[\alpha]_{\mathcal{B}} = P[\alpha]_{\mathcal{B}'}$ , d.h.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n p_{1j} x'_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n p_{nj} x'_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

Ferner aus  $[\alpha]_{\mathcal{B}} = 0 \Leftrightarrow [\alpha]_{\mathcal{B}'} = 0$  folgt, dass das homogene LGS  $PX' = 0$  nur die triviale Lösung  $X' = 0$  hat. Also ist  $P$  invertierbar. Wir bekommen also dual  $[\alpha]_{\mathcal{B}'} = P^{-1}[\alpha]_{\mathcal{B}}$ .

Wir haben bewiesen:

### Satz 15.3.

Sei  $\dim(V) = n$  über  $K$ ,  $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$  geordnete Basen wie in Bemerkung 15.2;  $P$  die eindeutig definierte invertierbare Matrix mit Spalten  $P_j := [\alpha'_j]_{\mathcal{B}}$  für  $j = 1, \dots, n$ . Es gelten für alle  $\alpha \in V$

(i)  $[\alpha]_{\mathcal{B}} = P[\alpha]_{\mathcal{B}'}$  und

(ii)  $[\alpha]_{\mathcal{B}'} = P^{-1}[\alpha]_{\mathcal{B}}$ .

### Satz 15.4.

Sei  $P$   $n \times n$  invertierbar (über  $K$ ),  $V$  ein  $n$ -dim  $K$ -Vektorraum und  $\mathcal{B}$  eine geordnete Basis. Es gibt eine eindeutig definierte (eindeutig bestimmte) geordnete Basis  $\mathcal{B}'$  von  $V$ , so dass für alle  $\alpha \in V$

(i)  $[\alpha]_{\mathcal{B}} = P[\alpha]_{\mathcal{B}'}$  und

(ii)  $[\alpha]_{\mathcal{B}'} = P^{-1}[\alpha]_{\mathcal{B}}$ .

### Beweis

Wenn  $\mathcal{B}' = \{\alpha'_1, \dots, \alpha'_n\}$  (i) erfüllen sollte, dann gilt notwendigerweise  $[\alpha'_j]_{\mathcal{B}} = P[\alpha'_j]_{\mathcal{B}'} =$

$$P \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{1j} \\ \vdots \\ p_{nj} \end{pmatrix}, \text{ also } \alpha'_j = \sum_{i=1}^n p_{ij} \alpha_i.$$

Nun zeigen wir, dass die so definierten  $\alpha'_j$  eine Basis bilden. Sei  $Q := P^{-1}$ .

Wir berechnen:

$$\sum_j Q_{jk} \alpha'_j = \sum_j Q_{jk} \sum_i p_{ij} \alpha_i = \sum_j \sum_i p_{ij} Q_{jk} \alpha_i = \sum_i \left( \underbrace{\sum_j p_{ij} Q_{jk}}_{(PQ)_{ik}} \right) \alpha_i = \sum_i (\delta_{ik}) \alpha_i = \alpha_k \text{ für}$$

$$1 \leq k \leq n.$$

Also  $\text{span}(\mathcal{B}') \supseteq \mathcal{B}$ . So  $\text{span}(\mathcal{B}') = V$ . □

(Siehe HL1 und HL2)

$$\text{ÜB} \left\{ \begin{array}{l} \textbf{Hilfslemma 1:} \quad \dim V = n; X \subseteq V; \\ \quad \quad \quad |X| = n \text{ und } X \text{ linear unabhängig} \Rightarrow X \text{ eine Basis.} \\ \textbf{Hilfslemma 2:} \quad \dim V = n; X \subseteq V; \\ \quad \quad \quad |X| = n \text{ und } X \text{ erzeugt} \Rightarrow X \text{ eine Basis.} \end{array} \right.$$

### Korollar 15.5.

$P$   $n \times n$  ist invertierbar  $\Leftrightarrow$  die Spalten von  $P$  sind linear unabhängig in  $K^n$ .

### Beweis

$P \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = PX = 0$  hat nur die triviale Lösung  $\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n x_i P_i = 0$  ist eine triviale lineare Kombination, wobei  $P_i$  die  $i$ -te Spalte von  $P$  ist.

### Korollar 15.6.

Seien  $\dim(V) = n$  und  $P$   $n \times n$  invertierbar genau dann, wenn die Spalten von  $P$  eine Basis für  $V$  bilden.

### Beispiel 15.7.

Eine parametrische Familie von geordneten Basen  $K = \mathbb{R}; \theta \in \mathbb{R}$ .

$P = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$  ist invertierbar mit

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

So gilt für jede  $\theta \in \mathbb{R}$ , dass  $\mathcal{B}_\theta := \{(\cos \theta, \sin \theta), (-\sin \theta, \cos \theta)\}$  eine Basis für  $\mathbb{R}^2$  ist.

Sei  $\alpha = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ .

$$\text{Es gilt } [\alpha]_{\mathcal{B}_\theta} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta \\ -x_1 \sin \theta + x_2 \cos \theta \end{pmatrix}$$

# 16 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra I

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

## Erinnerung

$$(i) \quad y = (y_1, \dots, y_n).$$

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \quad \alpha_i : i\text{-te Zeile.}$$

$$\text{Es gilt: } yA = y_1\alpha_1 + \dots + y_n\alpha_n.$$

$$(ii) \quad i\text{-te Zeile von } BA = [i\text{-te Zeilenmatrix von } B]$$

$$A = (B_{i1}, \dots, B_{in}) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^n B_{ij}\alpha_j; \quad 1 \leq i \leq n.$$

Also ist die  $i$ -te Zeile von  $BA$  eine lineare Kombination der Zeilen von  $A$ .

## Korollar 16.1.

$A$   $n \times n$  über  $K$ ,  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  die Zeilenvektoren von  $A$  linear unabhängig  $\Rightarrow A$  invertierbar.

## Beweis

$\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$  ist eine Basis für  $K^n$ , also schreibe Standard Basisvektor:

$$e_i = \sum_{j=1}^n B_{ij}\alpha_j \quad 1 \leq i \leq n.$$

Sei  $B$  die  $n \times n$ -Matrix mit  $B_{ij}$  als Koeffizienten. Betrachte die Matrix  $BA$ , die  $i$ -te Zeile von  $BA = [i\text{-te Zeile von } B]A$ , ie.  $(B_{i1}, \dots, B_{in})A = \sum_{j=1}^n B_{ij}\alpha_j = e_i$ . Also  $BA = I_n$ .  $\square$

Für die Umkehrung siehe Übungsblatt.

## Kapitel 2: § 5 Zeilenraum

### Definition 16.2.

Sei  $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \alpha_m \end{pmatrix}$   $m \times n$  über  $K$  und  $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in K^n$  Zeilen von  $A$ .

Der *Zeilenraum* von  $A$  ist  $\text{span}\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\} \subseteq K^n$  (Unterraum).

Der *Zeilenrang* von  $A$  ist die Dimension davon.

### Satz 16.3.

Zeilenäquivalente Matrizen haben denselben Zeilenraum.

### Beweis

$B = PA$ ;  $P$  invertierbar;  $A, B$   $m \times n$ .

$A$   $m \times n$ ;  $B$   $m \times n$ ;  $P$   $m \times m$

So  $B = P A \leftarrow$  jede  $B$ -Zeile ist eine Linearkombination von  $A$ -Zeilen.

Also  $A = P^{-1}B \leftarrow$  jede  $A$ -Zeile ist eine Linearkombination von  $B$ -Zeilen.

Also liegt jede  $B$ -Zeile im  $\text{span}\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$  und umgekehrt.

Also Zeilenraum von  $A =$  Zeilenraum von  $B$ . □

Wir werden auch die Umkehrung von Satz 16.3 zeigen. Dafür studieren wir den Zeilenraum von Matrizen in r.Z.S.F.

### Satz 16.4.

Sei  $R \neq 0$  in r.Z.S.F. Dann bilden die Zeilenvektoren von  $R$  die ungleich 0 sind, eine Basis für den Zeilenraum von  $R$  (also Zeilenrang von  $R = \#$  der Zeilen, die ungleich 0 sind).

### Beweis

Seien  $p_1, \dots, p_r$  die Zeilen  $\neq 0$ ;  $R = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_r \\ \vdots \end{pmatrix}$

Es ist klar, dass  $p_1, \dots, p_r$  den Zeilenraum erzeugen. Wir zeigen nun lineare Unabhängigkeit (analog Beispiel 13.4 (d)).

Seien  $k_1 < \dots < k_r$  die Spaltenindexe (in der die Haupteinse der  $p_i$  erscheinen)

$c_1 p_1 + \dots + c_r p_r = c_1(0, \dots, 1, \dots, 0) + c_2(\dots, 0, 0, 1, \dots, 0) + \dots + c_r(0, \dots, 0, 1, \dots, 0) = (0, \dots, 0)$

impliziert  $c_1 = \dots = c_r = 0$ . □

**Hilfslemma 16.5.**

Seien  $R$  und  $R'$   $m \times n$  in r.Z.S.F. Es gilt:  $R$  und  $R'$  haben denselben Zeilenraum **impliziert**  $R = R'$ .

**Beweis**

$k_1 < \dots < k_r, k'_1 < \dots < k'_r \leftarrow$  Haupteins-Spalten. Index wie oben.

Beobachte: Wenn  $p_i$  eine lineare Kombination von  $\{p'_1, \dots, p'_r\}$  ist, dann gilt  $k_i = k'_i$  für alle  $1, \dots, r$ .  $\square$

**Satz 16.6.**

Seien  $m, n \in \mathbb{N}$  und  $K$  ein Körper. Sei  $W$  ein Unterraum von  $K^n$ ;  $\dim W \leq m$ .  
Es gilt:  $\exists!$   $m \times n$ -Matrix in r.Z.S.F.  $R$  mit Zeilenraum  $R = W$ .

**Beweis**

**Existenz:**  $\dim W \leq m$ . Seien  $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in W$ ;  $\text{span} \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\} = W$ .

Setze  $A := \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \alpha_m \end{pmatrix} m \times n$ -Matrix.

Zeilenraum  $A = W$ .  $A$  Z. ä. zu  $R$  in r.Z.S.F. und Zeilenraum  $A =$  Zeilenraum  $R = W$ .

**Eindeutigkeit:** Sei  $R'$  eine Matrix in r.Z.S.F. mit Zeilenraum  $R' = W$ .

Dann gilt: Zeilenraum  $R =$  Zeilenraum  $R' \stackrel{(H.L.)}{\Rightarrow} R = R'$ .  $\square$

**Korollar 16.7.**

Jede  $m \times n$ -Matrix ist zeilenäquivalent zu einer *eindeutigen* Matrix in r.Z.S. F.

**Beweis**

$A$  ist zeilenäquivalent zu  $R$  und  $A$  ist zeilenäquivalent zu  $R'$   
 $\Rightarrow$  Zeilenraum  $R =$  Zeilenraum  $A =$  Zeilenraum  $R' \Rightarrow R = R'$ .  $\square$

**Korollar 16.8.**

$A, B$  sind  $m \times n$ -Matrizen über  $K$ . Es gilt  $A$  ist zeilenäquivalent zu  $B$  genau dann, wenn Zeilenraum  $A =$  Zeilenraum  $B$ .

**Beweis**

" $\Rightarrow$ "  $\checkmark$

" $\Leftarrow$ " Zeilenraum  $A =$  Zeilenraum  $R =$  Zeilenraum  $B =$  Zeilenraum  $R'$   
 $\Rightarrow R = R'$ . Also ist  $A$  zeilenäquivalent zu  $R$  und  $B$  ist zeilenäquivalent zu  $R \Rightarrow A$  ist zeilenäquivalent zu  $B$ .  $\square$

**Korollar 16.9.**

$A, B$  sind  $m \times n$ -Matrizen über  $K$ . Folgende sind äquivalent:

- (1)  $A$  und  $B$  sind zeilenäquivalent.
- (2)  $A$  und  $B$  haben denselben Zeilenraum.
- (3)  $B = PA$ ;  $P$  invertierbar  $m \times m$ .

**Zusammenfassung**

- (I) Verfahren zum Berechnen von Basis und Dim von Zeilenraum von  $A$ .
  - Reduziere  $A$  zu  $R$  in r.Z.S.F..
  - Eine Basis für Zeilenraum  $A = \{p_1, \dots, p_r\}$  (die nicht Nullzeilen von  $R$ ).
- (II) Nun betrachten wir den Lösungsraum zu  $AX = 0$ , wobei  $A$  eine  $m \times n$ -Matrix ist. Setze  $S =$  Lösungsraum. Wir berechnen eine Basis und die Dimension.
  - Reduziere  $A$  zu  $R$  in r.Z.S.F.  $S$  ist auch Lösungsraum für  $RX = 0$ .
  - Seien  $p_1, \dots, p_r$  die nicht Nullzeilen von  $R$  und  $k_1, \dots, k_r$  die Spaltenindexe, in denen die Haupteins der Zeilen erscheinen.

**Erinnerung**

Lösungsverfahren:

$\{x_{k_1}, \dots, x_{k_r}\}$  Hauptvariablen  $J = \{1, \dots, n\} \setminus \{k_1, \dots, k_r\}$

$\{x_j, j \in J\}$  freie Variablen;  $|J| = n - r$ .

**Löse**

$$\bullet \left. \begin{array}{l} x_{k_1} = \sum_{j \in J} c_{1j} x_j \\ \vdots \\ x_{k_r} = \sum_{j \in J} c_{rj} x_j \end{array} \right\} (*) c_{ij} \in K; 1 \leq i \leq r; j \in J$$

- Alle Lösungen bekommt man durch Einsetzen **beliebiger** Werte für  $x_j, j \in J$ .
- Also sei  $E_j$  die Lösung, die man bekommt durch Einsetzen von  $x_j = 1$  und  $x_i = 0$  für alle  $i \in J \setminus \{j\}$ .

**Behauptung**

Die  $(n - r)$ -Vektoren  $\{E_j; j \in J\}$  sind eine Basis für  $S$ .

**Beweis**

- (1) Lineare Unabhängigkeit wie oben. (Die Spaltenmatrix  $E_j$  hat eine 1 in der  $j$ -ten Zeile und 0 in den anderen Zeilen, die durch Elemente aus  $J$  indiziert sind.)
- (2) Erzeugen: folgt aus (\*).

**Details:** ÜA. Also  $\{E_j; j \in J\}$  Basis. Es gilt also:  $\dim S = n - r$ .



# 17 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra I

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

## Kapitel 3: § 1 Lineare Transformationen

### Definition 17.1.

(i) Seien  $V, W$   $K$ -VR. Eine Abbildung  $T : V \rightarrow W$  ist eine lineare Transformation wenn

$$\forall \alpha, \beta \in V, \forall c \in K : T(\alpha + c\beta) = T(\alpha) + cT(\beta)$$

(ii) Eine lineare Transformation  $T : V \rightarrow V$  heißt linearer Operator.

### Beispiel 17.2.

(i)  $T = 0$ .

(ii)  $I(\alpha) = \alpha$  Identität

### Beispiel 17.3.

$V :=$  Polynomiale Funktionen über  $K$ .

$$f(x) = c_0 + c_1x + \cdots + c_kx^k$$

$$(Df)(x) = c_1 + 2c_2x + \cdots + kc_kx^{k-1}$$

Ableitung Operator.

### Beispiel 17.4.

Sei  $A$  eine  $m \times n$ -Matrix über  $K$ .

$$(a) T : K^{n \times 1} \rightarrow K^{m \times 1}$$

$$T(X) := AX$$

$$(b) U : K^m \rightarrow K^n$$

$$U(\alpha) = \alpha A$$

### Beispiel 17.5.

$P$  ist eine  $m \times m$ -Matrix;  $Q$  ist eine  $n \times n$ -Matrix.

$$T : K^{m \times n} \rightarrow K^{m \times n}$$

$T(A) := PAQ$  ist ein linearer Operator.

**Beispiel 17.6.**
 $V = \{f; f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ stetig}\}$ 
 $T : V \rightarrow V$ 
 $f \mapsto Tf$ , wobei  $(Tf)(x) := \int_0^x f(t)dt$  für  $x \in \mathbb{R}$ .
**Bemerkung 17.7.**
 Lineare Abbildungen erhalten l. K.:  $T(\sum_{j=1}^n c_j \alpha_j) = \sum_{j=1}^n c_j T(\alpha_j)$ .
**Satz 17.8.**
 Sei  $V$  ein endlich dim Vektorraum über  $K$  und  $W$  ein  $K$ -VR. Sei  $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$  eine geordnete Basis für  $V$ . Seien  $\beta_1, \dots, \beta_n$  beliebige Vektoren in  $W$ .

 Es existiert eine einzige lineare Transformation  $T : V \rightarrow W$  mit  $T(\alpha_j) = \beta_j$ 

 für alle  $1 \leq j \leq n$ .

(\*)

**Beweis**
 Existenz: Sei  $\alpha \in V$ .  $\alpha = \sum x_j \alpha_j$ .

 Definiere  $T(\alpha) := \sum x_j \beta_j$ . Insbesondere ist (\*) erfüllt.

 Ist  $T$  linear?

 Sei  $\gamma = y_1 \alpha_1 + \dots + y_n \alpha_n$  und sei  $c \in K$ . Man hat:

 $c\alpha + \gamma = (cx_1 + y_1)\alpha_1 + \dots + (cx_n + y_n)\alpha_n$ . Also

$$T(c\alpha + \gamma) = (cx_1 + y_1)\beta_1 + \dots + (cx_n + y_n)\beta_n$$

$$= (cx_1\beta_1 + y_1\beta_1) + \dots + (cx_n\beta_n + y_n\beta_n)$$

$$= (cx_1\beta_1 + \dots + cx_n\beta_n) + (y_1\beta_1 + \dots + y_n\beta_n)$$

$$= c(x_1\beta_1 + \dots + x_n\beta_n) + (y_1\beta_1 + \dots + y_n\beta_n) = cT(\alpha) + T(\gamma)$$

**Eindeutigkeit:** Seien  $T, U : V \rightarrow W$  linear mit  $T(\alpha_j) = \beta_j = U(\alpha_j)$ .

 Zu zeigen:  $T(\alpha) = U(\alpha)$  für alle  $\alpha \in V$ .

Berechne:

$$U(\alpha) = U(\sum c_j \alpha_j) = \sum c_j U(\alpha_j) = \sum c_j T(\alpha_j) = T(\sum c_j \alpha_j) = T(\alpha).$$

□

**Bemerkung 17.9.**

Wir haben gezeigt:

- (1)  $T, U : V \rightarrow W$  lineare Transformation. Es gilt:  $T = U$  genau dann, wenn  $T(\alpha_j) = U(\alpha_j)$  für alle  $1 \leq j \leq n$  für eine geordnete Basis  $\{\alpha_j; 1 \leq j \leq n\}$  von  $V$ .
- (2) Wenn wir die Werte  $T(\alpha_j)$  kennen, dann können wir "T per Linearität fortsetzen".

**Beispiel 17.10.**

$$V = \mathbb{R}^2, W = \mathbb{R}^3.$$

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_1 = (1, 2) \\ \alpha_2 = (3, 4) \end{array} \right\} \text{Basis für } V.$$

$$\beta_1 = (3, 2, 1)$$

$$\beta_2 = (6, 5, 4)$$

$$T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$T(1, 2) = (3, 2, 1)$$

$$T(3, 4) = (6, 5, 4)$$

$$T(e_1) = ?$$

$$e_1 = (1, 0) = (-2)(1, 2) + (3, 4)$$

$$T(e_1) = (-2)(3, 2, 1) + (6, 5, 4) = (0, 1, 2).$$

**Beispiel 17.11.**

(mehr dazu im §4, 20. Script)

$T : K^m \rightarrow K^n$  ist eindeutig bestimmt durch  $T(e_i) := \beta_i$  für alle  $i = 1, \dots, m$  und  $\beta_i \in K^n$ .

Sei  $\alpha = (x_1, \dots, x_m) \in K^m$ .  $T(\alpha) = x_1\beta_1 + \dots + x_m\beta_m$ .

$$\text{Setze } B = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \text{-----} \\ \text{-----} \\ \text{-----} \\ \beta_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T(e_1) \\ \text{-----} \\ \text{-----} \\ \text{-----} \\ T(e_m) \end{pmatrix} \text{ } m \times n\text{-Matrix.}$$

$$\text{Berechne: } \alpha B = \underset{1 \times m}{(x_1 \cdots x_m)} \underset{m \times n}{\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix}} = \underset{1 \times n}{x_1\beta_1 + \cdots + x_m\beta_m}.$$

Also  $T(\alpha) = \alpha B$ .

## Kapitel 3: § 2 Bild und Nullraum (Kern)

### Lemma 17.12.

Sei  $T : V \rightarrow W$  eine lineare Transformation.

- (1)  $R_T := \{T(\alpha) \mid \alpha \in V\}$   
 $= \{w \mid w \in W \text{ und es existiert ein } \alpha \in V \text{ mit } T(\alpha) = w\}$   
 ist ein Unterraum von  $W$ .
- (2)  $N := T^{-1}\{0\} := \{\alpha \mid \alpha \in V \text{ und } T(\alpha) = 0\}$ .  
 $N := \ker(T)$  ist ein Unterraum von  $V$ .

### Beweis

- (1)  $\beta_1, \beta_2 \in R_T; c \in K \Rightarrow c\beta_1 + \beta_2 \in R_T?$

$$\beta_1 = T(\alpha_1) \quad \beta_2 = T(\alpha_2)$$

$$T(c\alpha_1 + \alpha_2) = cT(\alpha_1) + T(\alpha_2) = c\beta_1 + \beta_2.$$

$T(0) = 0 \in R_T$ . Also  $R_T \neq \emptyset$ .  $R_T$  ist ein Unterraum.

- (2)  $\alpha_1, \alpha_2 \in N$

$T(c\alpha_1 + \alpha_2) = c0 + 0 = 0$ . Also  $c\alpha_1 + \alpha_2 \in N$ . Auch  $0 \in N$ , so dass  $N \neq \emptyset$ . □

### Definition 17.13.

Sei  $V$  endlich dim;  $T : V \rightarrow W$  eine lineare Transformation.

$\text{rang}(T) := \dim R_T$ .

# 18 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra I

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

## Bemerkung 18.1.

$V$  endlich dim;  $T : V \rightarrow W$  eine lineare Transformation.

Es gilt:  $R_T = T(V) \subseteq W$  (Unterraum) ist endlich erzeugt, weil:

Sei  $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$  eine Basis für  $V$  und  $\alpha \in V$ . Setze  $\beta_i := T(\alpha_i)$ .

$$T(\alpha) = T(\sum c_i \alpha_i) = \sum c_i T(\alpha_i) = \sum c_i \beta_i.$$

$\Rightarrow T(\alpha) \in \text{span} \{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ . Also  $R_T = \text{span} \{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ . □

## Satz 18.2.

$V$  endlich dim;  $T : V \rightarrow W$ .

Es gilt:  $\dim V = \dim \ker T + \text{rang } T$ .

## Beweis

Sei  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$  eine Basis für  $N = \ker T$ . Sei  $\alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n \in V$ , so dass  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n\}$  eine Basis für  $V$  ist.

**Behauptung:**  $\{T(\alpha_{k+1}), \dots, T(\alpha_n)\}$  bilden eine Basis für  $R_T$ .

**Beweis:** Aus Bemerkung 18.1 folgt:  $\underbrace{\{T(\alpha_1), \dots, T(\alpha_k)\}}_{=0}, T(\alpha_{k+1}), \dots, T(\alpha_n)$  erzeugen  $R_T$ .

Also  $\{T(\alpha_{k+1}), \dots, T(\alpha_n)\}$  erzeugen  $R_T$ . Sei nun  $\sum_{i=k+1}^n c_i T(\alpha_i) = 0$ .

$$\text{Also } T\left(\underbrace{\sum_{i=k+1}^n c_i \alpha_i}_{:=\alpha}\right) = 0.$$

Also  $\alpha \in N$ ; es existiert  $b_1, \dots, b_k \in K$  mit  $\alpha = \sum_{i=1}^k b_i \alpha_i$ .

$$\text{Also } 0 = \alpha - \alpha = \sum_{i=1}^k b_i \alpha_i - \sum_{j=k+1}^n c_j \alpha_j = 0.$$

Aber  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n\}$  sind linear unabhängig also

$$b_1 = \dots = b_k = c_{k+1} = \dots = c_n = 0. \quad \square$$

## Beispiel 18.3.

$A$  ist eine  $m \times n$ -Matrix.  $T_A : K^{n \times 1} \rightarrow K^{m \times 1}$

$$T_A(X) := AX$$

$\ker T_A = \text{Lösungsraum } AX = 0$ .

$$R_{T_A} = \{Y \in K^{m \times 1}; \exists X : AX = Y\} \quad (*)$$

Seien  $A_1, \dots, A_n$  Spalten von  $A$ . Dann ergibt (\*):  $Y \in R_{T_A}$  genau dann, wenn existiert  $X$ , so dass  $Y = x_1 A_1 + \dots + x_n A_n$ .

Also  $R_{T_A} = \text{Spaltenraum von } A$  und  $\text{rang}(T_A) = \text{Spaltenrang von } A$ , wobei Spaltenraum  $:= \text{span} \{A_1, \dots, A_n\}$ ; Spaltenrang  $:= \dim$  Spaltenraum.

### Kapitel 3: § 3 Die Algebra der linearen Transformation

Seien  $V, W$  Vektorräume über  $K$ . Wir haben gesehen, dass  $\text{Fkt}(V, W) = \{f \mid f : V \rightarrow W \text{ eine Funktion}\}$  versehen mit Funktion Addition und Skalarmultiplikation ein  $K$ -Vektorraum ist.

#### Satz 18.4.

Setze  $L(V, W) := \{T \mid T : V \rightarrow W \text{ lineare Transformation}\} := L$  mit Addition

$(T + U)(\alpha) := T(\alpha) + U(\alpha)$  für alle  $T$  und  $U \in L$

$(dT)(\alpha) := d(T(\alpha)) \quad d \in K$ .

Es gilt:  $T + U \in L$  und  $dT \in L$ .

#### Beweis

$(T + U)(c\alpha + \beta) = c(T + U)(\alpha) + (T + U)(\beta)$  (Übungsaufgabe)

$(dT)(c\alpha + \beta) = dT(c\alpha + \beta) = d(cT(\alpha) + T(\beta)) = cdT(\alpha) + dT(\beta)$

$= c(dT(\alpha)) + (dT)(\beta)$ . □

#### Bemerkung 18.5.

$0 \in L(V, W)$ ;  $L(V, W) \neq \emptyset$ . Also  $L(V, W) \subseteq \text{Fkt}(V, W)$  (Unterraum). Insbesondere ist  $L(V, W)$  ein  $K$ -Vektorraum.

#### Satz 18.6.

$V$   $n$ -dim,  $W$   $m$ -dim über  $K$ . Dann ist  $\dim L(V, W) = mn$ .

#### Beweis

$\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$  ist eine geordnete Basis von  $V$  und  $\mathcal{B}' = \{\beta_1, \dots, \beta_m\}$  ist eine geordnete Basis von  $W$ . Für jedes  $(p, q)$  mit  $1 \leq p \leq m$  und  $1 \leq q \leq n$  definieren wir  $E^{p,q}$  eine lineare Transformation:

$E^{p,q} : V \rightarrow W$  definiert für  $j = 1, \dots, n$

$$E^{p,q}(\alpha_j) := \begin{cases} 0 & j \neq q \\ \beta_p & j = q \end{cases} = \delta_{jq} \beta_p$$

#### Behauptung

$\{E^{p,q} : 1 \leq p \leq m \text{ und } 1 \leq q \leq n\}$  bilden eine Basis für  $L$ .

#### Beweis

Sei  $T : V \rightarrow W$  und  $1 \leq j \leq n$ . Schreibe  $T(\alpha_j) = \sum_{p=1}^m A_{pj} \beta_p$  in  $\mathcal{B}'$  für geeignete  $A_{pj} \in K$ .

**Zwischenbehauptung:**  $T = \underbrace{\sum_p \sum_q A_{pq} E^{p,q}}_{:=U},$

$$\begin{aligned} \text{weil } U(\alpha_j) &= (\sum_p \sum_q A_{pq} E^{p,q})(\alpha_j) \\ &= \sum_p \sum_q A_{pq} \delta_{jq} \beta_p \\ &= \sum_{p=1}^m A_{pj} \beta_p \\ &= T(\alpha_j) \end{aligned}$$

Also  $U(\alpha) = T(\alpha)$  für alle  $\alpha \in V$ . Also  $U = T$ .

Also  $\{E^{p,q} : 1 \leq p \leq m \text{ und } 1 \leq q \leq m\}$  erzeugen  $L$ .  
Linear unabhängig ?

Sei  $U = \sum_p \sum_q A_{pq} E^{p,q} = 0$  für  $A_{pq} \in K$ . Also gilt für alle  $j = 1, \dots, n$ :

$U(\alpha_j) = 0$  i.e.  $\sum_{p=1}^m A_{pj} \beta_p = 0$ . Nun ist  $\{\beta_p : 1 \leq p \leq m\}$  linear

unabhängig  $\Rightarrow A_{pj} = 0$  für alle  $p$  und  $j$ . □

### Satz 18.7.

Seien  $V, W, Z$  Vektorräume über  $K$  und  $T, U$  lineare Transformationen.

$$V \xrightarrow{T} W \quad W \xrightarrow{U} Z.$$

Es gilt  $V \xrightarrow{U \circ T} Z$  ist wieder linear.

### Beweis

$$(U \circ T)(c\alpha + \beta) = U(T(c\alpha + \beta)) = U(cT(\alpha) + T(\beta)) = cU(T(\alpha)) + U(T(\beta)) = c(U \circ T)(\alpha) + (U \circ T)(\beta) \quad \square$$

### Sonderfall

$V = W = Z$ . Also hat  $L(V, V)$  eine Vektorenmultiplikation  $UT := U \circ T$ .

### Bezeichnung

Schreibe  $T^0 := I$  (Identitätsabbildung)

$$T^2 := T \circ T$$

$$T^n := T \circ \dots \circ T$$

**Definition 18.8.**

Sei  $K$  ein Körper. Eine *lineare Algebra*  $L$  über  $K$  ist ein  $K$ -Vektorraum, versehen mit einer Vektorenmultiplikation, so dass

(a)  $\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$  für alle  $\alpha, \beta, \gamma \in L$

(b)  $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$  und  $(\alpha + \beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma$  für alle  $\alpha, \beta, \gamma \in L$

(c)  $c(\alpha\beta) = (c\alpha)\beta = \alpha(c\beta)$  für alle  $c \in K$ .

(d) Falls ein  $I \in L$  existiert mit  $I \cdot \alpha = \alpha \cdot I = \alpha$  für alle  $\alpha \in L$ , heißt  $L$  eine lineare Algebra mit Einheit.

(e) Falls  $\alpha\beta = \beta\alpha$  für alle  $\alpha, \beta \in L$  heißt  $L$  kommutativ.

**Lemma 18.9.**

$L(V, V)$  ist eine  $K$ -lineare Algebra mit Einheit.

**Beweis**

(a) Ergibt sich.

(b)  $U(T_1 + T_2)(\alpha) = U((T_1 + T_2)(\alpha)) = U(T_1(\alpha) + T_2(\alpha))$

$$= U(T_1(\alpha)) + U(T_2(\alpha)) = (UT_1)(\alpha) + (UT_2)(\alpha).$$

Auch  $((T_1 + T_2)U)(\alpha) = (T_1 + T_2)(U(\alpha)) = T_1(U(\alpha)) + T_2(U(\alpha))$

$$= (T_1U + T_2U)(\alpha).$$

(c) Analog. □



## 19 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra I

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

### Definition 19.1.

Sei  $T : V \rightarrow W$  eine Abbildung.  $T$  ist invertierbar, wenn es eine Abbildung  $U$  gibt mit  $U : W \rightarrow V$  und  $U \circ T = Id_V$  und  $T \circ U = Id_W$ , wobei  $Id$  die Identitätsabbildung bezeichnet:  $Id(x) = x$  für alle  $x$ .

### Lemma 19.2.

$T$  ist invertierbar  $\Leftrightarrow T$  ist bijektiv.

### Beweis

“ $\Rightarrow$ ”

$$(1) \quad T(x_1) = T(x_2) \Rightarrow x_1 = (U \circ T)(x_1) = U(T(x_1)) = U(T(x_2)) \\ = (U \circ T)(x_2) = x_2, \text{ also ist } T \text{ injektiv.}$$

$$(2) \quad (T \circ U)(y) = y, \text{ also } y = T(U(y)) \text{ für alle } y \in W, \text{ also ist } T \text{ surjektiv.}$$

“ $\Leftarrow$ ”

$T$  bijektiv  $\Leftrightarrow$  für alle  $y \in W$  existiert genau ein  $x \in V$  mit  $T(x) = y$ . Setze  $U(y) := x$ . Also wird  $U : W \rightarrow V$  eindeutig definiert durch  $U(y) = x \Leftrightarrow T(x) = y$ .

Berechne  $U(T(x)) = ?$ . Setze  $y := T(x)$ . Also  $U(T(x)) = x$ .

Analog  $T(U(y)) = y$ . Also  $U \circ T = Id_V$  und  $T \circ U = Id_W$ . □

### Bezeichnung 19.3.

$T$  ist invertierbar  $\Rightarrow U$  ist eindeutig definiert. Schreibe  $U := T^{-1}$ . Also  $T^{-1}(y) = x \Leftrightarrow y = T(x)$ .

### Satz 19.4.

$T$  ist linear und invertierbar  $\Rightarrow T^{-1}$  ist linear und invertierbar.

### Beweis

$$T^{-1}(\underbrace{c\beta_1 + \beta_2}_{:=Y}) \stackrel{?}{=} \underbrace{cT^{-1}(\beta_1) + T^{-1}(\beta_2)}_{:=X}$$

$T^{-1}(Y) = X \Leftrightarrow T(X) = Y$ . Also berechne  $T(X) = T(cT^{-1}(\beta_1) + T^{-1}(\beta_2)) \\ = cT(T^{-1}(\beta_1)) + T(T^{-1}(\beta_2)) = c\beta_1 + \beta_2$ . □

**Satz 19.5.**

Es seien  $V \xrightarrow{G} W \xrightarrow{L} Z$  invertierbare Abbildungen. Dann ist  $L \circ G : V \rightarrow Z$  invertierbar und  $(L \circ G)^{-1} = G^{-1} \circ L^{-1}$ .

**Beweis**

$(G^{-1} \circ L^{-1}) \circ (L \circ G) = G^{-1} \circ (L^{-1} \circ L) \circ G = G^{-1} \circ I \circ G = G^{-1} \circ G = I$ . Andere: Analog.  $\square$

**Definition 19.6. und Bezeichnung**

$GL_k(V) := \{T \mid T : V \rightarrow V \text{ invertierbare lineare Abbildung}\}$ .

**Bemerkung 19.7.**

Wir haben gerade gezeigt, dass  $GL_k(V)$  mit der Verknüpfung  $\circ$  eine Gruppe ist.  $GL_k(V)$  ist die *allgemeine lineare Gruppe* (general linear group).

**Definition 19.8.**

$T$  ist *singulär*, falls  $\ker(T) \neq \{0\}$  ist. Sonst heißt  $T$  *regulär* oder *nicht singulär*. Also bedeutet  $T$  regulär:  $T(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha = 0$ .

**Satz 19.9.**

$T : V \rightarrow W$  ist regulär  $\Leftrightarrow T$  bildet eine linear unabhängige Teilmenge von  $V$  auf eine linear unabhängige Teilmenge von  $W$ .

**Beweis**

“ $\Rightarrow$ ”

Sei  $\ker(T) = \{0\}$  und  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  linear unabhängig in  $V$ . Zu zeigen:  $T(\alpha_1), \dots, T(\alpha_k)$  linear unabhängig.

Sei  $c_1 T(\alpha_1) + \dots + c_k T(\alpha_k) = 0$ . Also  $T(c_1 \alpha_1 + \dots + c_k \alpha_k) = 0$ . Also  $c_1 \alpha_1 + \dots + c_k \alpha_k \in \ker(T)$ . Also  $c_1 \alpha_1 + \dots + c_k \alpha_k = 0$ ;  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  linear unabhängig  $\Rightarrow c_1 = \dots = c_k = 0$ .  $\square$

**Korollar 19.10.**

Sei  $\dim(V) = \dim(W) = d$  und  $T : V \rightarrow W$  eine lineare Abbildung. Es gilt  $T$  ist injektiv  $\Leftrightarrow T$  ist surjektiv.

**Beweis**

Wir wenden den Dimensionssatz (Satz 18.2) an.

$d = \text{rang}(T) + \dim \ker(T)$ . Also  $T$  injektiv  $\Leftrightarrow \ker(T) = \{0\} \Leftrightarrow$

$\dim \ker(T) = 0 \Leftrightarrow \text{rang}(T) = d \Leftrightarrow \dim R_T = d \Leftrightarrow R_T = W \Leftrightarrow T$  surjektiv.  $\square$

## 20 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra I

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

### Kapitel 3: § 4 Matrix-Darstellung von linearen Transformationen

#### Ansatz

Seien  $V$  und  $W$  zwei  $K$ -Vektorräume mit  $\dim(V) = n$  und  $\dim(W) = m$ . Sei  $T : V \rightarrow W$  eine lineare Abbildung.

Seien  $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$  eine geordnete Basis für  $V$  und  $\mathcal{B}' = \{\alpha'_1, \dots, \alpha'_m\}$  eine geordnete Basis für  $W$ .

#### Definition 20.1.

$T$  ist eindeutig bestimmt durch  $T(\alpha_1), \dots, T(\alpha_n) \in W$ . Schreibe

$$[T(\alpha_j)]_{\mathcal{B}'} := \begin{pmatrix} A_{1j} \\ \vdots \\ A_{mj} \end{pmatrix} \text{ für } j = 1, \dots, n$$

und setze

$$[T]_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} := \left( [T(\alpha_1)]_{\mathcal{B}'} \mid \cdots \mid [T(\alpha_n)]_{\mathcal{B}'} \right)$$

Diese  $m \times n$ -Matrix heißt die *Matrix-Darstellung von  $T$  bezüglich der Basen  $\mathcal{B}$  und  $\mathcal{B}'$* .

Welche Eigenschaften hat  $[T]_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$ ?

#### Satz 20.2.

Es gilt für  $\alpha \in V$  :  $[T(\alpha)]_{\mathcal{B}'} = [T]_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}[\alpha]_{\mathcal{B}}$  (\*)

#### Beweis

Setze  $A := [T]_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} = [A_{ij}]_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$

$$[\alpha]_{\mathcal{B}} := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Nun ist  $[T(\alpha_j)]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} A_{1j} \\ \vdots \\ A_{mj} \end{pmatrix}$ . Also ist  $T(\alpha_j) = \sum_{i=1}^m A_{ij} \alpha'_i$ .

Berechne nun:

$$T(\alpha) = T\left(\sum_{j=1}^n x_j \alpha_j\right) = \sum_{j=1}^n x_j T(\alpha_j) = \sum_{j=1}^n x_j \sum_{i=1}^m A_{ij} \alpha'_i = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n A_{ij} x_j\right) \alpha'_i.$$

$$\text{Es folgt: } [T(\alpha)]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n A_{1j} x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n A_{mj} x_j \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}. \quad \square$$

**Behauptung 20.3.**

(\*) bestimmt die Matrix  $[T]_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$  eindeutig!

**Beispiel 20.4.**

Sei  $A$  eine  $m \times n$ -Matrix. Wir haben zwei lineare Abbildungen dazu assoziiert:

(1)  $T : K^{n \times 1} \rightarrow K^{m \times 1}$  mit  $T(x) := Ax$

(2)  $U : K^m \rightarrow K^n$  mit  $U(\alpha) := \alpha A$ .

(1) Seien  $\mathcal{E}$  und  $\mathcal{E}'$  die Standard-Basen für  $K^{n \times 1}$  und  $K^{m \times 1}$ . Wir berechnen  $[T]_{\mathcal{E}, \mathcal{E}'}$ . Setze  $\mathcal{E} = \{\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n\}$ ,  $\mathcal{E}' = \{\mathcal{E}'_1, \dots, \mathcal{E}'_m\}$

Dafür berechne  $[T(\mathcal{E}_j)]_{\mathcal{E}'}$ . Nun haben wir

$$T(\mathcal{E}_j) = A \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = j\text{-te Spalte von } A = \begin{pmatrix} A_{1j} \\ \vdots \\ A_{mj} \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} A_{1j} \\ \vdots \\ A_{mj} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^m A_{ij} \mathcal{E}'_i.$$

Also  $[T(\mathcal{E}_j)]_{\mathcal{E}'} = j\text{-te Spalte von } A$ , insbesondere haben wir  $[T]_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} = A$ . □

(2) Für (2) siehe ÜB.

**Satz 20.5.**

Die Abbildung

$$\begin{aligned} \rho : L(V, W) &\rightarrow K^{m \times n} \\ T &\mapsto [T]_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} \end{aligned}$$

ist eine Isomorphie von  $K$ -Vektorräumen.

**Beweis**

Ist  $\rho$  linear?

Berechne

$$\rho(cT_1 + T_2) = [cT_1 + T_2]_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} = ([cT_1 + T_2](\alpha_1)]_{\mathcal{B}'} \mid \cdots \mid [cT_1 + T_2](\alpha_n)]_{\mathcal{B}'} = ?$$

Nun haben wir

$$\begin{aligned} j\text{-te Spalte von } \rho(cT_1 + T_2) &= \underbrace{[(cT_1 + T_2)(\alpha_j)]_{\mathcal{B}'}}_{\substack{j\text{-te Spalte von } \rho(T_1) \\ c[T_1(\alpha_j)]_{\mathcal{B}'}}} + \underbrace{[T_2(\alpha_j)]_{\mathcal{B}'}}_{j\text{-te Spalte von } \rho(T_2)} \\ &= [cT_1(\alpha_j) + T_2(\alpha_j)]_{\mathcal{B}'} = \end{aligned}$$

Also: Die  $j$ -te Spalte von  $\rho(cT_1 + T_2)$  ist gleich wie die  $j$ -te Spalte von  $\rho(T_2)$  plus  $c$ -mal die  $j$ -te Spalte von  $\rho(T_1)$ . Also

$$\rho(cT_1 + T_2) = c\rho(T_1) + \rho(T_2).$$

Ist  $\rho$  injektiv?

Sei  $T \in L(V, W)$  mit  $\rho(T) = 0_{m \times n}$ .

$$\text{Dann ist } [T(\alpha_j)]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ f\"ur alle } j = 1, \dots, n.$$

Aber dann ist  $T(\alpha_j) = 0$  f\"ur alle  $j = 1, \dots, n$ . Also ist  $T$  identisch mit der Nullabbildung. Daraus folgt auch, dass  $\rho$  surjektiv ist, weil  $mn = \dim L(V, W) = \dim K^{m \times n}$  (siehe ÜB).  $\square$

### Sonderfall

Wir betrachten  $T : V \rightarrow V$  ist ein linearer Operator und  $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$ .

### Definition 20.6. und Bezeichnung

Schreibe  $[T]_{\mathcal{B}, \mathcal{B}} := [T]_{\mathcal{B}}$  ist die *Matrixdarstellung des Operators in der Basis*  $\mathcal{B}$ . Hier gilt also die folgende Version von (\*):

$$[T(\alpha)]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}}[\alpha]_{\mathcal{B}}.$$

Nun betrachten wir die Matrixdarstellung von Hintereinanderausf\"uhungen

$$V \xrightarrow{T} W \xrightarrow{U} Z \text{ und } V \xrightarrow{U \circ T} Z$$

### Ansatz:

$V, W, Z$  sind endlich dim  $K$ -Vektorr\"aume.  $T, U$  sind lineare Abbildungen.

$\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$  ist eine Basis f\"ur  $V$

$\mathcal{B}' = \{\beta_1, \dots, \beta_m\}$  ist eine Basis f\"ur  $W$

$\mathcal{B}'' = \{\gamma_1, \dots, \gamma_p\}$  ist eine Basis f\"ur  $Z$

Setze  $A = [T]_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$ ,  $B = [U]_{\mathcal{B}', \mathcal{B}''}$  und  $C = [U \circ T]_{\mathcal{B}, \mathcal{B}''} = ?$

### Satz 20.7.

$C = BA$ .

### Beweis

$$[T(\alpha)]_{\mathcal{B}'} \stackrel{(*)}{=} A[\alpha]_{\mathcal{B}} \text{ und } [U(T(\alpha))]_{\mathcal{B}''} \stackrel{(*)}{=} B[T(\alpha)]_{\mathcal{B}'}$$

Also  $[(U \circ T)(\alpha)]_{\mathcal{B}''} = BA[\alpha]_{\mathcal{B}}$ . (\*) erf\"ullt also die Matrix  $BA$  bez\"uglich  $U \circ T$ . Die Eindeutigkeit impliziert nun unsere Behauptung.  $\square$

## 21 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra I

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

### Kapitel 3: § 4 Matrix-Darstellung von linearen Transformationen

#### Ansatz

Wie in Vorlesung 20:  $V$  ist endlich-dimensional mit Dimension  $n$ ;  $\mathcal{B}$  ist eine geordnete Basis für  $V$ .

#### Korollar 21.1.

$\rho : L(V, V) \rightarrow K^{n \times n}$ .  $\rho(T) := [T]_{\mathcal{B}}$  ist ein  $K$ -Algebren Isomorphismus.

#### Beweis

$\rho$  ist ein  $K$ -Vektorraum-Isomorphismus. Ferner gilt  $\rho(T_1 \circ T_2) = \rho(T_1)\rho(T_2)$ . □

#### Korollar 21.2.

$T : V \rightarrow V$ . Es gilt:  $T$  ist invertierbar genau dann, wenn  $[T]_{\mathcal{B}}$  invertierbar ist. In diesem Fall gilt ferner  $[T^{-1}]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}}^{-1}$ .

#### Beweis

$T$  ist invertierbar  $\Leftrightarrow$  es existiert  $T^{-1}$  mit  $T \circ T^{-1} = T^{-1} \circ T = Id$

$$\Leftrightarrow [T \circ T^{-1}]_{\mathcal{B}} = [T^{-1} \circ T]_{\mathcal{B}} = [Id]_{\mathcal{B}}$$

$$\Leftrightarrow [T]_{\mathcal{B}}[T^{-1}]_{\mathcal{B}} = [T^{-1}]_{\mathcal{B}}[T]_{\mathcal{B}} = I_n$$

$$\Leftrightarrow [T]_{\mathcal{B}}^{-1} = [T^{-1}]_{\mathcal{B}}. \quad \square$$

#### Ansatz

$V$  endlich dim.  $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$  und  $\mathcal{B}' = \{\alpha'_1, \dots, \alpha'_n\}$  sind zwei geordnete Basen für  $V$ .  $T \in L(V, V)$ .

#### Fragestellung

Was ist die Beziehung zwischen  $[T]_{\mathcal{B}}$  und  $[T]_{\mathcal{B}'}$ ?

**Lösung**

Satz 15.3 liefert eine invertierbare  $P$ , so dass für alle  $\alpha \in V$  gilt

$$[\alpha]_{\mathcal{B}} = P[\alpha]_{\mathcal{B}'} \quad (**)$$

Und Satz 20.2 liefert eine eindeutige Matrix  $[T]_{\mathcal{B}}$  so, dass für alle  $\alpha \in V$ :

$$[T(\alpha)]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}}[\alpha]_{\mathcal{B}} \quad (*).$$

$$\text{Nun gilt } (**) \text{ für } T(\alpha) \in V: [T(\alpha)]_{\mathcal{B}} = P[T(\alpha)]_{\mathcal{B}'} \quad (***)$$

(\*), (\*\*) und (\*\*\*) liefern

$$[T]_{\mathcal{B}}P[\alpha]_{\mathcal{B}'} = P[T(\alpha)]_{\mathcal{B}'} \quad \text{oder} \quad (P^{-1}[T]_{\mathcal{B}}P)[\alpha]_{\mathcal{B}'} = [T(\alpha)]_{\mathcal{B}'}.$$

Also erfüllt  $(P^{-1}[T]_{\mathcal{B}}P)$  die bestimmende matrizielle Gleichung (\*) bezüglich der Basis  $\mathcal{B}'$ . Die Eindeutigkeit von  $[T]_{\mathcal{B}'}$  für die Erfüllung der (\*) liefert nun

$$[T]_{\mathcal{B}'} = P^{-1}[T]_{\mathcal{B}}P, \text{ wobei } P = \left( \begin{array}{c|c|c} [\alpha'_1]_{\mathcal{B}} & & \\ \hline & \cdots & \\ \hline & & [\alpha'_n]_{\mathcal{B}} \end{array} \right).$$

**Bemerkung 21.3.**

Betrachte die Abbildung  $\pi : V \rightarrow V$ . Diese lineare Abbildung ist eindeutig definiert durch die Angaben  $\pi(\alpha_j) := \alpha'_j$  für alle  $j = 1, \dots, n$ . Dieser Operator ist invertierbar, da er eine *Basis auf eine Basis abbildet* (Korollar 19.10 zu Satz 19.9). So die Matrix-Darstellung  $[\pi]_{\mathcal{B}}$  ist invertierbar. Es ist

$$[\pi]_{\mathcal{B}} = ([\pi(\alpha_1)]_{\mathcal{B}} \mid \cdots \mid [\pi(\alpha_n)]_{\mathcal{B}}) = ([\alpha'_1]_{\mathcal{B}} \mid \cdots \mid [\alpha'_n]_{\mathcal{B}}) = P.$$

$P$  heißt deshalb "Matrix der Basiswechsel".

Wir haben bewiesen:

**Satz 21.4.**

(Ansatz wie oben)

$$[T]_{\mathcal{B}'} = [\pi]_{\mathcal{B}}^{-1}[T]_{\mathcal{B}}[\pi]_{\mathcal{B}} \text{ oder } [T]_{\mathcal{B}'} = P^{-1}[T]_{\mathcal{B}}P.$$

**Definition 21.5.**

Seien  $A, B \in K^{n \times n}$ . wir sagen  $B$  ist zu  $A$  *ähnlich*, falls es eine invertierbare  $P \in K^{n \times n}$  gibt, so dass  $B = P^{-1}AP$ .

Wir haben in Satz 21.4 bewiesen:

Sind  $B = [T]_{\mathcal{B}'}$  und  $A = [T]_{\mathcal{B}}$  die Matrix-Darstellungen des Operators  $T$  bezüglich der Basen  $\mathcal{B}'$  bzw.  $\mathcal{B}$ , dann ist  $B$  zu  $A$  ähnlich. Tatsächlich gilt auch die Umkehrung!

**Satz 21.6.**

$B$  ist ähnlich zu  $A$  genau dann, wenn  $B$  und  $A$  denselben linearen Operator (bezüglich geeigneter Basen) darstellen.





## 22 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra I

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

### Kapitel 3: § 5 Lineare Funktionale

#### Bemerkung 22.1.

$W = K^1$  ist ein  $K$ -Vektorraum.  $\dim(W) = 1$ . Die Standard-Basis ist  $\{1\}$ .  $W' \subseteq W$  ist ein Unterraum  $\Rightarrow W' = \{0\}$  oder  $W' = W$ . Also  $\dim W' = 0$  oder  $\dim W' = 1$  und  $\dim W' = 1$  genau dann, wenn  $W' \neq \{0\}$ .

#### Definition 22.2.

$f \in L(V, K)$  heißt ein *lineares Funktional*.

#### Beispiel 22.3.

$V = K^n$ ;  $\mathcal{E}$  ist die Standard-Basis. Sei  $(a_1, \dots, a_n) \in V$  fixiert.

Definiere  $f : V \rightarrow K$  durch  $f(x_1, \dots, x_n) := \sum_{i=1}^n a_i x_i$  (\*)

Es gilt  $f \in L(V, K)$  und  $[f]_{\mathcal{E}, \{1\}} = [a_1, \dots, a_n]$ . Umgekehrt sei  $f \in L(V, K)$ . Setze  $a_j := f(\mathcal{E}_j)$ , dann erfüllt  $f$  (\*) für  $(a_1, \dots, a_n)$ .

Allgemeiner sei  $\dim V = n$  und  $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$  eine Basis.

Sei  $(a_1, \dots, a_n) \in K^n$  fixiert.

Definiere  $f : V \rightarrow K$  durch  $f\left(\sum_{i=1}^n x_i \alpha_i\right) = \sum_{i=1}^n x_i a_i$ . (\*)

Dann ist  $f \in L(V, K)$  und  $[f]_{\mathcal{B}, \{1\}} = [[f(\alpha_1)]_{\{1\}} \mid \dots \mid [f(\alpha_n)]_{\{1\}}] = ([a_1]_{\{1\}} \mid \dots \mid [a_n]_{\{1\}}) = [a_1, \dots, a_n]$ .

Und umgekehrt:  $f \in L(V, K)$ , setze  $a_i = f(\alpha_i)$ , dann ist  $f$  wie in (\*).

#### Beispiel 22.4.

$V = K^{n \times n}$ ;  $tr : V \rightarrow K$

$tr(A) := \sum_{i=1}^n A_{ii}$  ist ein lineares Funktional.

#### Beispiel 22.5.

Seien  $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall und  $V = C([a, b]) := \{g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}; g \text{ stetig}\}$ .

Setze  $f(g) := \int_a^b g(t) dt$  für  $g \in V$ . Dann gilt  $f \in L(V, \mathbb{R})$ .

**Definition 22.6. und Notation**

$V^* = L(V, K)$  heißt der *Dualraum*.

Sei nun  $\dim V = n$ .

**Bemerkung 22.7.**

$\dim V^* = \dim L(V, K) = n = \dim V$ .

Also für jede Basis  $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$  für  $V$  werden wir nun eine Basis  $\mathcal{B}^*$  von  $V^*$  zuordnen. Satz 17.8 liefert für  $i = 1, \dots, n$  ein eindeutig definiertes Funktional  $f_i$  mit  $f_i(\alpha_j) = \delta_{ij}$ .

**Behauptung**

$\{f_1, \dots, f_n\}$  ist eine Basis für  $V^*$ . Es genügt zu zeigen, dass sie linear unabhängig sind.

**Beweis**

Für  $f = \sum_{i=1}^n c_i f_i$  mit  $c_i \in K$  gilt für alle  $j = 1, \dots, n$ :

$$f(\alpha_j) = \sum_{i=1}^n c_i f_i(\alpha_j) = c_j. \quad (**)$$

Insbesondere wenn  $f = 0$ , dann gilt  $f(\alpha_j) = 0$  für alle  $j$ , d.h.  $c_j = 0$  für alle  $j$ . □

**Definition 22.8.**

$\mathcal{B}^* = \{f_1, \dots, f_n\}$  heißt die *Dualbasis* zu  $\mathcal{B}$ .

**Satz 22.9.**

Sei  $\dim V = n$  und  $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$  eine Basis für  $V$ . Es existiert genau eine (Dual)Basis  $\mathcal{B}^* = \{f_1, \dots, f_n\}$  für  $V^*$ , so dass

$$(1) \quad f_i(\alpha_j) = \delta_{ij}$$

$$(2) \quad \text{und } f = \sum_{i=1}^n f(\alpha_i) f_i \text{ für alle } f \in V^*$$

$$(3) \quad \text{und } \alpha = \sum_{i=1}^n f_i(\alpha) \alpha_i \text{ für alle } \alpha \in V.$$

Das heißt für alle  $f \in V^*$  und für alle  $\alpha \in V$  gilt:

$$[f]_{\mathcal{B}^*} = \begin{pmatrix} f(\alpha_1) \\ \vdots \\ f(\alpha_n) \end{pmatrix} \text{ und } [\alpha]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} f_1(\alpha) \\ \vdots \\ f_n(\alpha) \end{pmatrix} \text{ die sogenannte Dualität.}$$

**Beweis**

(1) Ergibt sich.

(2)  $f \in V^* \Rightarrow f = \sum c_i f_i$  und (\*\*) liefert  $c_j = f(\alpha_j)$  für alle  $j = 1, \dots, n$ .

(3) Analog:  $\alpha = \sum x_i \alpha_i \Rightarrow f_j(\alpha) = f_j(\sum x_i \alpha_i) = x_j$ . □

**Bemerkung 22.10.**

(3) beschreibt  $f_i$  als die " $i$ -te Koordinatenfunktion bezüglich der Basis  $\mathcal{B}$ ".

$f_i : V \rightarrow K; \alpha \mapsto$  die  $i$ -te Koordinate in  $[\alpha]_{\mathcal{B}}$ .

**Bemerkung 22.11.**

$f \in V^*; f \neq 0; \text{Im}(f) \subseteq K$  ist ein Unterraum;  $\text{Im}(f) \neq \{0\}$ , also ist  $\text{Im}(f) = K$  (Bemerkung 22.1). Es gilt  $\dim(\text{Im}f) = R_f = 1$ . Der Dimensionssatz impliziert nun  $\dim \ker(f) + 1 = n$ , also  $\dim \ker(f) = n - 1$  (wobei  $n := \dim V$ ).

**Definition 22.12.**

Sei  $\dim(V) = n$  und  $W \subseteq V$  ein Unterraum mit  $\dim W = n - 1$ , dann heißt  $W$  *Hyperraum* (oder *Hyperebene* oder Unterraum der *Kodimension 1*).

**Bemerkung 22.11** besagt, dass wenn  $f \in V^*$  und  $f \neq 0$ , dann gilt, dass  $\ker(f) \subseteq V$  ein Hyperraum ist. Wir werden die Umkehrung (und mehr) zeigen.

## 23 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra I

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

### Kapitel 3: § 5 Lineare Funktionale

#### Definition 23.1.

Sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum  $\dim V = n$ ,  $S \subseteq V$ .

Annihilator  $S$  ist bezeichnet mit  $S^0$  und definiert als

$$S^0 = \{f \in V^* \mid S \subseteq \ker(f)\} = \{f \in V^* \mid f(\alpha) = 0 \text{ für alle } \alpha \in S\}.$$

#### Bemerkung 23.2.

- (i)  $S_1 \subseteq S_2 \Rightarrow S_2^0 \subseteq S_1^0$
- (ii)  $S^0 = (\text{span}(S))^0$
- (iii)  $S^0 \subseteq V^*$  ist immer ein Unterraum.
- (iv)  $S = \{0\} \Leftrightarrow S^0 = V^*$
- (v)  $S = V \Rightarrow S^0 = \{0\}$
- (vi) Also  $\text{span}(S) = V \Leftrightarrow S^0 = \{0\}$

#### Beweis von (iv)

“ $\Rightarrow$ ” ist klar.

Für “ $\Leftarrow$ ”: Sei  $S^0 = V^*$ . Zu zeigen  $S = \{0\}$ . Zum Widerspruch sei  $\alpha \neq 0$  und  $\alpha \in S$ .  $\{\alpha\}$  ist linear unabhängig  $\Rightarrow$  ergänze zu einer Basis  $\mathcal{B}$  für  $V$ :

$$\mathcal{B} = \{\alpha = \alpha_1, \dots, \alpha_n\}.$$

Sei  $\mathcal{B}^*$  die Dualbasis:  $\mathcal{B}^* = \{f_1, \dots, f_n\}$ . Es gilt  $f_1(\alpha_1) = 1$ , also  $f_1 \notin S^0$ . □

#### Beweis von (vi)

“ $\Rightarrow$ ” Schon gemacht.

“ $\Leftarrow$ ” Sei  $S^0 = \{0\}$ . Zu zeigen  $\text{span}(S) = V$ .

Zum Widerspruch setze  $W := \text{span}(S)$  und sei

$\alpha \in V \setminus W$  und  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\} \subseteq W$  eine Basis für  $W$ . Dann ist  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k, \alpha\}$  linear unabhängig.

Ergänze zu einer Basis für  $V$ :  $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_k, \alpha = \alpha_{k+1}, \alpha_{k+2}, \dots, \alpha_n\}$ .

Sei  $\{f_1, \dots, f_k, f_{k+1}, \dots, f_n\} = \mathcal{B}^*$  die Dualbasis. Es gilt  $f_{k+1}(\alpha_j) = 0$  für alle  $j = 1, \dots, k$  und  $f_{k+1}(\alpha_{k+1}) = 1$ . Also  $f_{k+1} \neq 0$  und  $f_{k+1} \in S^0$ . □

**Korollar 23.3.**

(Trennung Eigenschaft)

Sei  $W \subseteq V$  ein Unterraum und  $\alpha \notin W$ . Es existiert ein  $f \in V^*$  mit  $f(W) = \{0\}$  und  $f(\alpha) \neq 0$ .**Beweis**Sei  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$  eine Basis für  $W$ . Nun ist  $\alpha \notin \text{span}\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$ , also  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k, \alpha\}$  ist linear unabhängig.Ergänze zu einer Basis für  $V$ :  $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_k, \alpha = \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n\}$  und sei $\mathcal{B}^* = \{f_1, \dots, f_k, f_{k+1}, \dots, f_n\}$  die Dualbasis. Setze  $f := f_{k+1}$ . □**Satz 23.4.****(Dimensionsformel für Annihilatoren)**Sei  $V$  ein endlich dimensionaler Vektorraum über  $K$  und  $W \subseteq V$  ein Unterraum. Es gilt:  $\dim W + \dim W^0 = \dim V$ .**Beweis**Sei  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$  eine Basis für  $W$ . Ergänze zu einer Basis für  $V$ : $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_k, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n\}$ . Sei  $\mathcal{B}^* = \{f_1, \dots, f_n\}$  die Dualbasis.**Behauptung** $\{f_{k+1}, \dots, f_n\}$  ist eine Basis für  $W^0$ .**Beweis**Es ist klar, dass  $f_i \in W^0$  für alle  $i \geq k+1$ , weil  $f_i(\alpha_j) = \delta_{ij} = 0$ , falls  $i \geq k+1$  und  $j \leq k$ . Also wenn  $\alpha \in W$ , ist  $\alpha$  eine lineare Kombination von  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  und  $f_i(\alpha) = 0$  für alle  $i \geq k+1$ . Also  $f_i \in W^0$  für alle  $i \geq k+1$  wie behauptet.Nun ist  $\{f_{k+1}, \dots, f_n\}$  linear unabhängig (Teil einer Basis). Also genügt es zu zeigen, dass  $\text{span}\{f_{k+1}, \dots, f_n\} = W^0$ .Sei  $f \in V^*$ . Es gilt  $f = \sum_{i=1}^n f(\alpha_i) f_i$  (allgemein). Ist aber  $f \in W^0$ , dann gilt  $f(\alpha_i) = 0$  für alle  $i \leq k$ . Also gilt  $f = \sum_{i=k+1}^n f(\alpha_i) f_i$ . □**Korollar 23.5.**Sei  $\dim W = k$ ,  $\dim V = n$ ;  $W \subseteq V$  ein Unterraum.Es gilt:  $W$  ist der Durchschnitt von  $(n - k)$  Hyperebenen von  $V$ .**Beweis**In der Notation des obigen Beweises:  $W = \bigcap_{i=k+1}^n \ker(f_i)$ . □**Bemerkung 23.6.**Ist  $W$  eine Hyperebene.  $\dim W = n - 1$ . Also ist  $W = \ker(f_n)$  (wie angekündigt).

**Korollar 23.7.**

$W_1, W_2$  sind Unterräume von  $V$ . Es gilt:  $W_1^0 = W_2^0 \Rightarrow W_1 = W_2$ .

**Beweis**

Zum Widerspruch sei  $W_1 \neq W_2$ , zum Beispiel  $\alpha \in W_2, \alpha \notin W_1$ . Nach Korollar 23.3 existiert  $f \in V^*$  mit  $f(W_1) = \{0\}$  und  $f(\alpha) \neq 0$ . Also  $f \in W_1^0$ , aber  $f \notin W_2^0$ , ein Widerspruch.  $\square$

## 24 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra I

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

### Beobachtung

#### Beziehung zu homogenen Gleichungssystemen

$$\text{Sei } \left\{ \begin{array}{l} A_{11}x_1 + \cdots + A_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ A_{m1}x_1 + \cdots + A_{mn}x_n = 0 \end{array} \right\} \text{ homogenes Gleichungssystem} \quad (*)$$

mit Koeffizienten in Körper  $K$

Definiere für  $i = 1, \dots, m$  ein Funktional auf  $K^n$ :

$$f_i(x_1, \dots, x_n) := \sum_{j=1}^n A_{ij}x_j.$$

Es gilt: Lösungsraum von  $(*) = \bigcap_{i=1}^m \ker(f_i)$  (folgt unmittelbar aus den Definitionen). Wir werden diese einfache Beobachtung ausnutzen, um Annihilatoren zu berechnen.

### Beispiel 24.1.

$V = \mathbb{R}^5$ ;  $W = \text{span} \{ \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \}$ , wobei gilt:

$$\alpha_1 = (2, -2, 3, 4, -1),$$

$$\alpha_2 = (-1, 1, 2, 5, 2),$$

$$\alpha_3 = (0, 0, -1, -2, 3) \text{ und}$$

$$\alpha_4 = (1, -1, 2, 3, 0) \text{ ist.}$$

Finde  $W^0$ .

$$\text{Sei } f \in V^*. \text{ Es gilt allgemein } f(x_1, \dots, x_5) = \sum_{j=1}^5 c_j x_j.$$

**Insbesondere:** (homogenes Gleichungssystem in  $c_1, \dots, c_5$ )

$$f \in S^0 \Leftrightarrow f(\alpha_1) = f(\alpha_2) = \cdots = f(\alpha_4) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{j=1}^5 A_{ij}c_j = 0 \text{ für } 1 \leq i \leq 4$$

wobei  $A_{ij}$  die Koeffizienten der Koeffizientenmatrix  $A$  des (HGS) i.e.

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \text{ (GEV)} \Rightarrow \text{r. Z. S. F. :}$$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$c_1 \quad c_2 \quad c_3 \quad c_4 \quad c_5$

$c_1, c_3, c_5$  sind Hauptvariablen und  $c_2$  und  $c_4$  sind freie Variablen.

Wie üblich finden wir den Lösungsraum für  $\sum_{j=1}^5 R_{ij}c_j = 0$  für alle  $1 \leq i \leq 3$  i.e.

$$\begin{array}{rcccc} c_1 & - & c_2 & - & c_4 & = & 0 \\ & & c_3 & + & 2c_4 & = & 0 \\ & & & & c_5 & = & 0 \end{array}$$

Setze  $c_2 = a$  und  $c_4 = b$  beliebig  $\in \mathbb{R}$ , dann sind

$c_1 = a + b$ ,  $c_3 = -2b$  und  $c_5 = 0$  und

$W^0 = \{f \mid f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (a + b)x_1 + ax_2 - 2bx_3 + bx_4, a, b \in \mathbb{R}\}$ .

Es gilt  $\dim W^0 = 2$ .

Eine Basis für  $W^0$  erhält man z.B. durch einsetzen von

$$\left. \begin{array}{l} a = 1 \quad b = 0 \\ a = 0 \quad b = 1 \end{array} \right\} \text{ und } \left. \begin{array}{l} f_1(x_1, \dots, x_5) = x_1 + x_2 \\ f_2(x_1, \dots, x_5) = x_1 - 2x_3 + x_4 \end{array} \right\} \text{ ist eine Basis für } W^0$$

□



**Kapitel 3: § 6 Bi-Dual**

Sei  $V$  ein endlich dim Vektorraum über  $K$ .

Zwei Fragen haben wir noch nicht beantwortet:

$$(1) \quad V \longrightarrow V^* \\ \mathcal{B} \longmapsto \mathcal{B}^*$$

Umkehrung? Sei  $\mathbb{B}$  eine Basis für  $V^*$ . Existiert eine Basis  $\mathcal{B}$  für  $V$ , so dass  $\mathbb{B} = \mathcal{B}^*$ ?

$$(2) \quad V \longrightarrow V^* \\ W \longmapsto W^0$$

Umkehrung? Sei  $U$  ein Unterraum von  $V^*$ . Existiert ein Unterraum  $W$  von  $V$ , so dass  $U = W^0$ ?

**Schlüssel**

Wir betrachten  $(V^*)^* = V^{**}$ .

**Bemerkung 24.2.**

$\dim(V^{**}) = \dim V = \dim V^*$ .

**Definition 24.3. und Terminologie**

Der Dualraum  $V^{**}$  zu  $V^*$  heißt der *Bi-Dualraum* zu  $V$ .

**Proposition 24.4.**

Sei  $\alpha \in V$ .  $\alpha$  induziert kanonisch ein Funktional  $L_\alpha \in V^{**}$  wie folgt:

$$L_\alpha : V^* \longrightarrow K$$

definiert durch

$$L_\alpha(f) := f(\alpha) \quad \text{für } f \in V^*.$$

**Beweis**

$$L_\alpha(cf + g) = (cf + g)(\alpha) = cf(\alpha) + g(\alpha) = cL_\alpha(f) + L_\alpha(g) \quad \square$$

**Satz 24.5.**

Die Abbildung  $\lambda : V \longrightarrow V^{**}$   
 $\alpha \longmapsto L_\alpha$

ist ein Isomorphismus.

**Beweis**

$$\lambda(c\alpha + \beta) = c\lambda(\alpha) + \lambda(\beta) ?$$

Zu zeigen ist also  $[\lambda(c\alpha + \beta)](f) = [c\lambda(\alpha) + \lambda(\beta)](f)$  für alle  $f \in V^*$ .

Wir berechnen:

$$[\lambda(c\alpha + \beta)](f) = L_{c\alpha + \beta}(f) = f(c\alpha + \beta) = cf(\alpha) + f(\beta) = cL_\alpha(f) + L_\beta(f) = c\lambda(\alpha)(f) + \lambda(\beta)(f) = [c\lambda(\alpha) + \lambda(\beta)](f).$$

Also ist  $\lambda$  linear. Wir zeigen, dass  $\lambda$  bijektiv ist. Es genügt wegen  $\dim V = \dim V^{**}$  zu beweisen:  $\lambda$  ist regulär.

Sei  $\left\{ \begin{array}{l} \lambda(\alpha) = 0 \\ \text{i.e. } L_\alpha = 0 \end{array} \right\}$  zu zeigen  $\alpha = 0$ .

Zum Widerspruch  $\alpha \neq 0$ , also ist  $\{\alpha\}$  linear unabhängig.

Sei  $\mathcal{B} = \{\alpha = \alpha_1, \dots, \alpha_n\}$  eine Basis für  $V$  und  $\mathcal{B}^* = \{f_1, \dots, f_n\}$  die Dualbasis. Es gilt  $f_1(\alpha_1) = f_1(\alpha) = 1$ . Also  $L_\alpha(f_1) \neq 0$ . Also  $L_\alpha \neq 0$ , ein Widerspruch.  $\square$

## 25 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra I

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

Ansatz wie in der 24. Vorlesung.

### Korollar 25.1

Sei  $L$  ein lineares Funktional auf  $V^*$ . Es existiert genau ein  $\alpha \in V$  mit  $L = L_\alpha$ , i.e.

$$L(f) = f(\alpha) \text{ für alle } f \in V^* \quad (**)$$

### Beweis

Setze  $\alpha := \lambda^{-1}(L)$  □

### Korollar 25.1.

Sei  $\mathbb{B}$  eine Basis für  $V^*$ . Dann existiert eine Basis  $\mathcal{B}$  für  $V$  mit  $\mathcal{B}^* = \mathbb{B}$ .

### Beweis

Setze  $\mathbb{B} = \{f_1, \dots, f_n\}$ . Satz 22.9 liefert eine Dual-Basis zu

$$\mathbb{B}; \mathbb{B}^* := \{L_1, \dots, L_n\} \text{ für } (V^*)^* = V^{**}$$

so dass  $L_i(f_j) = \delta_{ij}$ .

Korollar 25.1 liefert: Für alle  $i$  existiert genau ein  $\alpha_i \in V$  mit (\*\*), i.e.

$$L_i(f) = f(\alpha_i) \text{ für alle } 1 \leq i \leq n; f \in V^*.$$

Insbesondere:  $\delta_{ij} = L_i(f_j) = f_j(\alpha_i)$  für alle  $1 \leq i \leq n$  und  $1 \leq j \leq n$ .

Setze nun  $\mathcal{B} := \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$  □

### Bemerkung 25.2.

Sei  $E \subseteq V^*$ , dann ist  $E^0 \subseteq V^{**}$ .

$$E^0 = \{L \in V^{**} \mid L(f) = 0 \text{ für alle } f \in E\}.$$

Wir berechnen:

$$\lambda^{-1}(E^0) = \begin{cases} \{ \alpha \in V \mid \lambda(\alpha) \in E^0 \} = \\ \{ \alpha \in V \mid L_\alpha \in E^0 \} = \\ \{ \alpha \in V \mid L_\alpha(f) = 0 \quad \text{für alle } f \in E \} = \\ \{ \alpha \in V \mid f(\alpha) = 0 \quad \text{für alle } f \in E \} \end{cases} \quad (\dagger)$$

### Satz 25.3.

Sei  $W \subseteq V$  ein Unterraum. Es gilt  $\lambda^{-1}(W^{00}) = W$ .

### Beweis

$\dim W + \dim W^0 = \dim V = \dim V^* = \dim W^0 + \dim W^{00}$ .

Dann gilt  $\dim W = \dim W^{00} = \dim \lambda^{-1}(W^{00})$ .

Es genügt nun zu zeigen, dass

$$W \subseteq \lambda^{-1}(W^{00}) = \{\alpha \in V \mid f(\alpha) = 0 \text{ für alle } f \in W^0\}$$

(siehe  $(\dagger)$ ). Aber  $\alpha \in W$ , also  $f(\alpha) = 0$  für alle  $f \in W^0$  per Definition! □

**Korollar 25.4.**

Sei  $U \subseteq V^*$  ein Unterraum. Setze  $W := \lambda^{-1}(U^0)$ . Es gilt:  $W^0 = U$ .

**Beweis**

$\dim V^* = \dim U + \dim U^0 = \dim V = \dim W + \dim W^0$ . Also  $\dim U = \dim W^0$

(weil  $\dim W = \dim \lambda^{-1}(U^0) = \dim U^0$ ).

Es genügt zu zeigen, dass  $U \subseteq W^0$ .

$W = \{\alpha \in V \mid f(\alpha) = 0 \text{ für alle } f \in U\}$  (siehe †). Sei  $f \in U$ , dann gilt  $f(\alpha) = 0$  für alle  $\alpha \in W$ . Also  $f \in W^0$  per Definition.  $\square$

## Kapitel 3: § 7 Die transponierte Abbildung

Ansatz wie immer.

Sei  $T : V \rightarrow W$  eine lineare Transformation.  $T$  induziert eine Abbildung  $T^t : W^* \rightarrow V^*$  definiert durch  $V^* \ni f := T^t(g) := g \circ T$  für  $g \in W^*$ , das heißt  $f(\alpha) = (g \circ T)(\alpha) = g(T(\alpha))$  für alle  $\alpha \in V$ .

### Behauptung

$T^t$  ist linear:  $c \in K; g_1, g_2 \in W^*$ .  $T^t(cg_1 + g_2) = (cg_1 + g_2) \circ T = c(g_1 \circ T) + (g_2 \circ T) = cT^t(g_1) + T^t(g_2)$ .

Wir haben bewiesen:

### Satz 25.5.

Sei  $V, W$  ein (endlich dim) Vektorraum über  $K$ . Für jede lineare Abbildung  $T : V \rightarrow W$  existiert genau ein (auch lineares)  $T^t : W^* \rightarrow V^*$ , so dass  $T^t(g)(\alpha) = g(T(\alpha))$  für alle  $g \in W^*, \alpha \in V$ .

## 26 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra I

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

### Definition 26.1.

$T^t$  ist die transponierte Abbildung zu  $T$ .

### Satz 26.2.

Es gelten:

- (0)  $\ker(T^t) = (R_T)^0$   
(Nullraum des transponierten  $T^t =$  Annihilator von Bild  $T$ )
- (1)  $\text{Rang}(T^t) = \text{Rang}(T)$
- (2)  $R_{T^t} = (\ker(T))^0$   
(Bild des transponierten  $T^t =$  Annihilator von Nullraum  $T$ )

### Beweis

(0)  $g \in \ker(T^t) \Leftrightarrow T^t(g) = 0 \Leftrightarrow g \circ T = 0 \Leftrightarrow g(T(\alpha)) = 0$  für alle  $\alpha \in V \Leftrightarrow g \in (R_T)^0$

(1) Setze  $\dim V = n$  und  $\dim W = m$ .  $r := \text{Rang}(T) := \dim R_T$ .

Satz 23.4 impliziert:

$$\dim(R_t) + \dim(R_T)^0 = \dim W = m.$$

$$\text{Also } r + \dim(R_T)^0 = m \Rightarrow \dim(R_T)^0 = m - r.$$

Aus (0) folgt nun:  $\dim(\ker T^t) = m - r$ . Nun ist  $T^t : W^* \rightarrow V^*$  und Satz 18.2 liefert  $\text{Rang}(T^t) + \dim(\ker T^t) = \dim W^* = m$ . Also  $\text{Rang}(T^t) = m - (m - r) = r$ .

(2) Setze  $N := \ker(T)$ .

**Behauptung:**  $R_{T^t} \subseteq N^0$ .

**Beweis:** Sei  $f \in R_{T^t}$ . Also  $f = T^t(g)$ .  $f \in V^*$  für ein  $g \in W^*$ .

Sei  $\alpha \in N$  und berechne:  $f(\alpha) = (g \circ T)(\alpha) = g(T(\alpha)) = g(0) = 0$ .

Andererseits haben wir wieder

$$\dim N^0 = n - \dim N = \text{Rang}(T) = \text{Rang}(T^t)$$

(ergibt sich aus (1)).

Das heißt  $R_{T^t} \subseteq N^0$  und  $\dim R_{T^t} = \dim N^0$ . Also  $R_{T^t} = N^0$ . □

### Satz 26.3.

Seien  $V, W$  endlich dim Vektorräume über  $K$ .  $T : V \rightarrow W$  und  $T^t : W^* \rightarrow V^*$  sind lineare Abbildungen. Sei  $\mathcal{B}$  eine geordnete Basis für  $V$  und  $\mathcal{B}^*$  die Dualbasis und sei  $\mathcal{B}'$  eine geordnete Basis für  $W$  und  $(\mathcal{B}')^*$  die Dualbasis. Es gilt:

$$[T]_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}^t = [T^t]_{(\mathcal{B}')^*, \mathcal{B}^*}.$$

### Beweis

**Erinnerung:** Sei  $A$  eine  $m \times n$ -Matrix, dann ist  $A^t$  eine  $n \times m$ -Matrix und  $(A^t)_{ij} = (A)_{ji}$ .

Setze  $A := [T]_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$  und  $B := [T^t]_{(\mathcal{B}')^*, \mathcal{B}^*}$ .

Sei  $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ ,  $\mathcal{B}' = \{\beta_1, \dots, \beta_m\}$ ,  $\mathcal{B}^* = \{f_1, \dots, f_n\}$  und  $(\mathcal{B}')^* = \{g_1, \dots, g_m\}$ .

Per Definition gilt:

$$T\alpha_j = \sum_{i=1}^m A_{ij}\beta_i \text{ für alle } j = 1, \dots, n \quad (*)$$

$$T^t g_j = \sum_{i=1}^n B_{ij}f_i \text{ für alle } j = 1, \dots, m \quad (**)$$

Wir berechnen nun

$$((T^t)(g_j))(\alpha_i) = g_j(T(\alpha_i)) = g_j\left(\sum_{k=1}^m A_{ki}\beta_k\right) = \sum_{k=1}^m A_{ki}g_j(\beta_k) = \sum_{k=1}^m A_{ki}\delta_{jk} = A_{ji}.$$

Nun für ein beliebiges  $f \in V^* : f = \sum_{i=1}^n f(\alpha_i)f_i$  (Darstellung zur Basis  $\mathcal{B}^*$ ).

Speziell für  $f = T^t g_j$  ergibt sich dann:

$$\sum_{i=1}^n B_{ij}f_i = T^t g_j = \sum_{i=1}^n T^t g_j(\alpha_i)f_i = \sum_{i=1}^n A_{ji}f_i.$$

Da  $\mathcal{B}^*$  eine Basis ist, ist die Darstellung jedes  $f$  eindeutig, also  $B_{ij} = A_{ji}$  wie behauptet.  $\square$

Wir geben nun als Anwendung einen sehr eleganten Beweis des Satzes, dass der Zeilenrang einer Matrix stets gleich ihrem Spaltenrang ist.

### Erinnerung

- (i)  $Sr(A)$ : Spaltenrang von  $A$  = Dimension des von den Spaltenvektoren von  $A$  aufgespannten Unterraumes.
- (ii)  $Zr(A)$ : Zeilenrang von  $A$  = Dimension des von den Zeilenvektoren von  $A$  aufgespannten Unterraumes.

### Satz 26.4.

$K$  ist ein Körper.  $A \in Mat_{m \times n}(K)$ . Dann ist  $Zr(A) = Sr(A)$ .

### Beweis

Es sei  $\mathcal{E}_n$  die Standardbasis für  $K^n$  und  $\mathcal{E}_m$  die Standardbasis für  $K^m$ .  $T : K^n \rightarrow K^m$  gegeben durch

$$T((x_1, \dots, x_n)) = (y_1, \dots, y_m), \text{ wobei } y_i := \sum_{j=1}^n A_{ij}x_j.$$

Es ist  $[T]_{\mathcal{E}_n, \mathcal{E}_m} = A$ . (ÜA).

Offenbar ist  $Sr(A) = \text{Rang}(T)$ , denn Bild  $(T)$  besteht gerade aus den Linearkombinationen der Spaltenvektoren von  $A$ . Außerdem ist  $Zr(A) = Sr(A^t)$ , denn die Zeilen von  $A$  sind gerade die Spalten von  $A^t$ . Mit den Resultaten der letzten beiden Sätze folgt also:

$$Sr(A) = \text{Rang}(T) = \text{Rang}(T^t) = Sr(A^t) = Zr(A), \text{ da } A^t = [T^t]_{\mathcal{E}_m^*, \mathcal{E}_n^*}. \quad \square$$

### Definition 26.5.

$\text{Rang}(A) := r(A) = Sr(A) = Zr(A)$ .

## Kapitel 3: § 8 Quotientenräume

Es sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und  $W \subseteq V$  ein Unterraum.

### Definition 26.6.

Für alle  $\alpha, \beta \in V$  gilt  $\alpha \equiv \beta \pmod{W}$  (Kongruenz:  $\alpha$  kongruent zu  $\beta$  modulo  $W$ ), falls  $\alpha - \beta \in W$ .

### Lemma 26.7.

$\equiv \pmod{W}$  ist eine Äquivalenzrelation auf  $V$ .

### Beweis

(1) Reflexiv:  $\alpha - \alpha = 0 \in W$

(2) Symmetrisch:  $\alpha - \beta \in W \Rightarrow -(\alpha - \beta) = \beta - \alpha \in W$

(3) Transitiv: Sind  $\alpha - \beta \in W$  und  $\beta - \gamma \in W$ ,  
so auch  $\alpha - \gamma = (\alpha - \beta) + (\beta - \gamma) \in W$ . □

### Definition 26.8.

Zu  $\alpha \in V$  heißt

$$[\alpha]_W := \{\beta \in V \mid \alpha \equiv \beta \pmod{W}\}$$

die Restklasse von  $\alpha \pmod{W}$ .

$\{[\alpha]_W \mid \alpha \in V\}$  heißen Restklassen von  $W$ .

### Notation

$W/W := \{[\alpha]_W \mid \alpha \in W\}$ .

### Bemerkung 26.9.

Offenbar ist  $[\alpha]_W = \{\alpha + \gamma \mid \gamma \in W\}$ . Wir können daher für  $[\alpha]_W$  auch  $\alpha + W$  schreiben. Also ist  $V/W := \{\alpha + W \mid \alpha \in V\}$ .



## 27 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra I

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

### Erinnerung

- (1)  $[\alpha]_W = \alpha + W$  ist die Nebenklasse von  $\alpha \bmod W$ . Ein  $\beta \in [\alpha]_W$  heißt *Repräsentant* der Äquivalenzklasse.
- (2)  $V/W :=$  Menge der Nebenklassen. Versehen mit einer Verknüpfung  $+$ :

$$(\alpha_1 + W) + (\alpha_2 + W) := (\alpha_1 + \alpha_2) + W$$

und einer Verknüpfung *Skalarmultiplikation*:

$$c \cdot (\alpha + W) := (c\alpha) + W \text{ für } c \in K.$$

### Lemma 27.1.

Diese Verknüpfungen sind wohldefiniert, unabhängig von der Wahl der Repräsentanten, i.e.

- (a)  $\alpha \equiv \alpha' \bmod W$  und  $\beta \equiv \beta' \bmod W \Rightarrow \alpha + \beta \equiv \alpha' + \beta' \bmod W$
- (b)  $\alpha \equiv \alpha' \bmod W$  und  $c \in K \Rightarrow c\alpha \equiv c\alpha' \bmod W$ .

### Beweis

$$(a) \quad \alpha - \alpha' \in W \text{ und } \beta - \beta' \in W \Rightarrow \underbrace{(\alpha - \alpha')}_{\in W} + \underbrace{(\beta - \beta')}_{\in W} =$$

$$(\alpha + \beta) - (\alpha' + \beta') \in W \Rightarrow \alpha + \beta \equiv \alpha' + \beta' \bmod W.$$

$$(b) \quad \alpha - \alpha' \in W \Rightarrow c(\alpha - \alpha') \in W \Rightarrow c\alpha - c\alpha' \in W \Rightarrow c\alpha \equiv c\alpha' \bmod W. \quad \square$$

### Lemma 27.2.

$V/W$  mit diesen Verknüpfungen ist ein  $K$ -Vektorraum.

### Beweis

ÜA: Was ist  $0$ ?

$0_{V/W} = 0 + W = W$  ist der Nullvektor in  $V/W$ .

Was ist eine additive Inverse?

$$(\alpha + W) + ((-\alpha) + W) = 0 + W = W = 0_{V/W}. \quad \square$$

### Notation

$\bar{\alpha} := \alpha + W$ . Also

$$(i) \quad \bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_2 = \overline{\alpha_1 + \alpha_2}$$

$$(ii) \quad c\bar{\alpha}_1 = \overline{c\alpha_1}$$

$$(iii) \quad \bar{\alpha} = 0 \Leftrightarrow \alpha + W = W \Leftrightarrow \alpha \in W$$

**Satz 27.3.**

(Die kanonische Projektion)

$$\pi_W : V \rightarrow V/W$$

 $\pi_W(\alpha) := \bar{\alpha}$  ist eine surjektive lineare Transformation mit  $\ker(\pi_W) = W$ .**Beweis** $\pi_W(c\alpha_1 + \alpha_2) = (c\alpha_1 + \alpha_2) + W = (c\alpha_1 + W) + (\alpha_2 + W) = c(\alpha_1 + W) + (\alpha_2 + W)$ . Sei  $\bar{\alpha} \in V/W$ , dann ist  $\bar{\alpha} = \pi_W(\alpha)$ .

$$\alpha \in \ker(\pi_W) \Leftrightarrow \bar{\alpha} = 0_{V/W} \Leftrightarrow \alpha + W = W \Leftrightarrow \alpha \in W. \quad \square$$

**Korollar 27.4.**

$$\dim W + \dim(V/W) = \dim V.$$

**Satz 27.5.**

(Homomorphiesatz)

Seien  $V, Z$  zwei  $K$ -Vektorräume und  $T : V \rightarrow Z$  linear. Es gilt:

$$V/\ker(T) \simeq R_T.$$

**Beweis**Definiere  $\bar{T} : V/\ker(T) \rightarrow R_T$  mit  $\bar{T}(\alpha + \ker(T)) = \bar{T}(\bar{\alpha}) = T(\alpha)$ .(i) Ist  $\bar{T}$  wohldefiniert?  $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}' \Rightarrow T(\alpha) = T(\alpha')$ ?

$$\alpha - \alpha' \in \ker(T) \Leftrightarrow T(\alpha - \alpha') = 0 \Leftrightarrow T(\alpha) = T(\alpha')$$

(ii) Linear?

$$\bar{T}(\bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_2) = \bar{T}(\overline{\alpha_1 + \alpha_2}) = T(\alpha_1 + \alpha_2) = T(\alpha_1) + T(\alpha_2) = \bar{T}(\bar{\alpha}_1) + \bar{T}(\bar{\alpha}_2).$$

Analog zeigt man: Für  $c \in K$  und  $\alpha \in V$  ist  $\bar{T}(c\bar{\alpha}) = c\bar{T}(\bar{\alpha})$ .(iii)  $T(\alpha) \in R_T$ . Es ist  $\bar{T}(\bar{\alpha}) = T(\alpha)$ . Also ist  $\bar{T}$  surjektiv.(iv)  $\bar{T}$  injektiv?

$$\bar{\alpha} \in \ker(\bar{T}) \Leftrightarrow \bar{T}(\bar{\alpha}) = 0 \Leftrightarrow T(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha \in \ker(T) \Leftrightarrow \bar{\alpha} = 0. \text{ So ist } \bar{T} \text{ regulär.} \quad \square$$

**Korollar 27.6.**

$$\frac{W \oplus W'}{W} \simeq W',$$

wobei  $W, W'$  Unterräume von  $V$  und  $V = W \oplus W'$  sind.**Beweis** $V = W \oplus W'$  bedeutet für alle  $v \in V$ , dass genau ein  $w \in W$  und genau ein  $w' \in W'$  existieren, so dass  $v = w + w'$ .Definiere  $\underline{P}_{W'} : V \rightarrow W'; v \mapsto w'$ .ÜA: Ist  $\underline{P}_{W'}$  linear? Surjektiv?

$$v \in \ker(\underline{P}_{W'}) \Leftrightarrow \underline{P}_{W'}(v) = 0 \Leftrightarrow w' = 0 \Leftrightarrow v \in W.$$

Satz 2  $\Rightarrow V/\ker(\underline{P}_{W'}) \simeq \text{Bild}(\underline{P}_{W'})$ . □

**Korollar 27.7.**

wobei  $W \subseteq V$  ein Unterraum ist.  $(V/W)^* \simeq W^0$ ,

**Beweis**

Sei  $\pi_W : V \twoheadrightarrow V/W$ . Betrachte  $\pi_W^t : (V/W)^* \rightarrow V^*$ . Setze  $T := \pi_W$ .

$R_{T^t} = (\ker(T))^0 = W^0$ .  $\ker(T^t) = (R_T)^0 = (V/W)^0 = \{0\}$ .

Also ist  $T^t$  regulär und surjektiv auf  $W^0$ . □

**Fragestellung**

Sei  $W \subseteq V$  ein Unterraum. Was ist die Beziehung zwischen  $W^*$  und  $V^*$  ?

**Korollar 27.8.**

wobei  $W \subseteq V$  ein Unterraum ist.  $W^* \simeq V^*/W^0$ ,

**Beweis**

$Id : W \rightarrow V$  Identitätsabbildung

$Id^t : V^* \rightarrow W^*$

$\ker(Id^t) = (R_{Id})^0 = W^0$

$R_{Id^t} = (\ker(Id))^0 = (\{0\})^0 = W^*$ . □

**Beweis**

Übungsaufgabe

Betrachte die Abbildung  $\rho : V^* \rightarrow W^*$ ;  $\rho(f) := f/W$  (die Restringierung).

Ist  $\rho$  linear? Was ist  $\ker(\rho)$ ? Was ist  $R_\rho$ ?

Benutze Homomorphiesatz (nach der Berechnung von  $\ker(\rho)$  und  $R_\rho$ ). □